ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

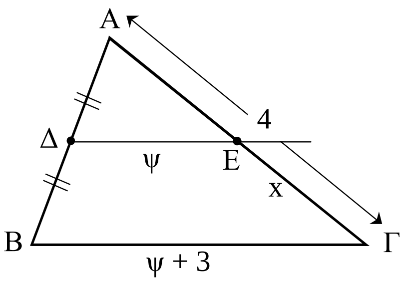
ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ **ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ**

1η εργασία

2ο – 3ο – 4ο ΘΕΜΑ

1. (2ο/2002)

Να υπολογίσετε τα x και ψ στα παρακάτω σχήματα. Συγκεκριμένα :



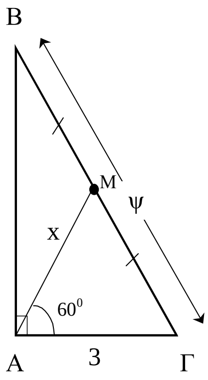
σχήμα 1

- Σχήμα 1

Ισχύει ότι ΑΔ = ΔΒ ,
ευθεία ΔΕ // ΒΓ ,
ΑΓ = 4.

ΔΕ = ψ , ΒΓ = ψ + 3 και ΕΓ = x.

Μονάδες 13



σχήμα 2

- Σχήμα 2

Ισχύει ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{ΒΑΓ} = 90^0$,

ΒΜ = ΜΓ , ΑΓ = 3 και

$\hat{ΜΑΓ} = 60^0$.

ΑΜ = x και ΒΓ = ψ.

Μονάδες 12

(Σε κάθε περίπτωση να εξηγήσετε σύντομα πώς καταλήξατε στα αντίστοιχα αποτελέσματα)

2. (2ο/2005)

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ. Είναι επίσης ΑΒ = 4 και ΓΔ = 12. Φέρουμε τη διάμεσο ΕΖ (Ε μέσο της ΑΔ, Ζ μέσο της ΒΓ), που τέμνει τη ΒΔ στο Κ και την ΑΓ στο Λ.

α. Να δείξετε ότι ΕΚ = ΛΖ = 2. **Μονάδες 12**

β. Να δείξετε ότι ΚΛ = 4 . **Μονάδες 13**

 ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ – ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

3. (3ο/2002)

Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ και στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Θ, Η αντίστοιχα ώστε ΑΘ = ΒΗ. Φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΘ και ΑΗ που τέμνονται στο σημείο Ι.
Να δείξετε ότι :

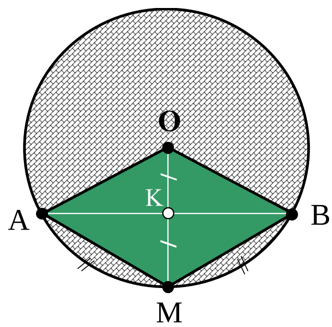
α. ΔΘ = ΑΗ — Μονάδες 13

β. Η γωνία $\widehat{AI\Theta} = 90^0$. — Μονάδες 12

4. (4ο/2002)

διπλανό σχήμα 3 βλέπουμε μια κυκλική πλατεία κέντρου Ο.
Το τετράπλευρο ΟΑΜΒ είναι ένας κήπος μέσα από τον οποίο διέρχονται δύο πεζόδρομοι ΟΜ και ΑΒ.

Το σημείο Μ είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ και το Κ είναι το μέσο του ΟΜ.



σχήμα 3

α. Να δείξετε ότι ο δρόμος ΟΜ τέμνεται κάθετα με τον ΑΒ.
8 Μονάδες

β. Να δείξετε ότι οι δρόμοι ΑΟ και ΑΜ είναι ίσοι.
7 Μονάδες

γ. Να δείξετε ότι ο κήπος ΟΑΜΒ έχει σχήμα ρόμβου.
10 Μονάδες

5. (3ο/2005)

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την ΑΒ προς το Β κατά τμήμα ΒΘ και τη ΓΔ προς το Δ κατά τμήμα ΔΗ ώστε ΒΘ = ΔΗ.

α. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΒΓΘ είναι ίσα. — **Μονάδες 10**

β. Να δείξετε ότι το ΑΘΓΗ είναι επίσης παραλληλόγραμμο. — **Μονάδες 10**

γ. Να δείξετε ότι τα τμήματα ΑΓ, ΒΔ, ΘΗ συντρέχουν, δηλ. διέρχονται από κοινό σημείο. — **Μονάδες 5**

6. (4ο/2005)

Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ. Επίσης Ε είναι το μέσο της ΑΒ, Ζ είναι το μέσο της ΑΓ και Μ είναι το μέσο της ΒΓ.

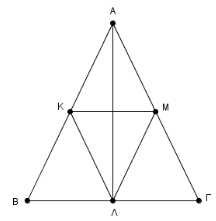
α. Να αιτιολογήσετε γιατί $\Delta E = \dfrac{AB}{2}$. — **Μονάδες 5**

β. Να αιτιολογήσετε γιατί $MZ = // \dfrac{AB}{2}$. — **Μονάδες 5**

γ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΜΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. — **Μονάδες 15**

7. (2ο/2011)

Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και τα σημεία Κ,Λ,Μ τα μέσα των ΑΒ , ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα.



Α. Να δικαιολογήσετε ότι το ΑΛ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ. **(Μον.10)**

Β. Δείξτε ότι το ΚΛΜ είναι ισοσκελές τρίγωνο. **(Μον.15)**

8. (2ο/2004)

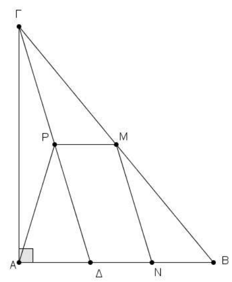
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Είναι επίσης ΒΜ και ΓΝ οι διάμεσοί του.

α. Να δείξετε ότι ΒΜ = ΓΝ. **Μονάδες 13**

β. Να δείξετε ότι τα Μ, Ν ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ. **Μονάδες 12**

9. (3ο/2011)

Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($Α=90^o$) και Δ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΒ. Αν Μ,Ν,Ρ είναι τα μέσα των ΒΓ, ΒΔ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



Α. Το ΜΝΔΡ είναι παραλληλόγραμμο. **(Μον. 9)**

Β. ΑΡ=ΡΔ **(Μον. 7)**

Γ. Το ΜΝΑΡ είναι ισοσκελές τραπέζιο. **(Μον. 9)**

10. (4ο/2004)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε . Από το Ε φέρνουμε παράλληλη προς τη πλευρά ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ζ.

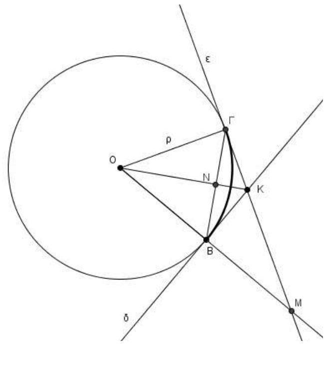
α. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΕΔΒ είναι παραλληλόγραμμο . **Μονάδες 8**

β. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές. **Μονάδες 10**

γ. Να δείξετε ότι ΑΕ = ΒΖ. **Μονάδες 7**

11. (4ο/2011)

Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και τόξο $ΒΓ=60^o$. Οι εφαπτόμενες ευθείες (δ) και (ε) του κύκλου στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο σημείο Κ. Να δείξετε ότι:



Α. Το τρίγωνο ΚΒΓ είναι ισοσκελές. **(Μον.5)**

Β. $ΒΚΓ=120^o$ **(Μον. 6)**

Γ. Η ΟΚ είναι κάθετη στην ΒΓ. **(Μον. 7)**

Δ. Αν η προέκταση της ΟΒ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Μ, τότε ΟΜ=2ρ. **(Μον. 7)**

12. (2ο/2006)

α. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Φέρουμε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ του τριγώνου ΑΒΓ. Να δείξετε ότι ΒΔ = ΓΕ.

Μονάδες 15

β. Να δείξετε ότι ισχύει και η αντίστροφη πρόταση του (α) ερωτήματος, δηλ. αν ΒΔ, ΓΕ είναι ύψη ενός τριγώνου ΑΒΓ με ΒΔ = ΓΕ, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 10

13. (2ο/2012)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Στις προεκτάσεις των ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα ίσα τμήματα ΒΔ και ΓΕ.
Να αποδείξετε ότι:

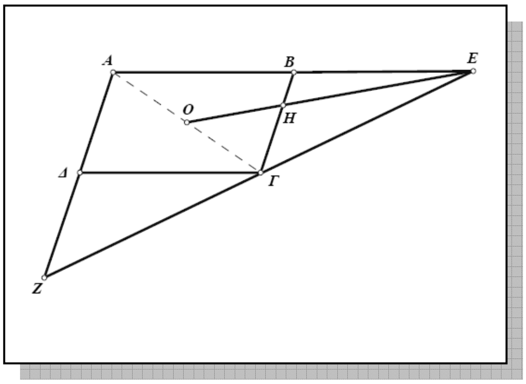
Β1. ΔΓ = ΒΕ. **Μονάδες 8**

Β2. $B\hat{\Delta}\Gamma = \Gamma\hat{E}B$ **Μονάδες 8**

Β3. Αν οι ΔΓ και ΒΕ τέμνονται στο Ο , δείξτε ότι ΒΟΓ ισοσκελές. **Μονάδες 9**

14. (3ο/2012)

Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατά τμήμα ΒΕ = ΑΒ. Φέρνουμε την ευθεία ΕΓ που τέμνει την ευθεία ΑΔ στο Ζ. Αν το Ο είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου και η ΟΕ τέμνει την ΒΓ στο Η, να δείξετε ότι:



Γ1. ΓΕ = ΓΖ

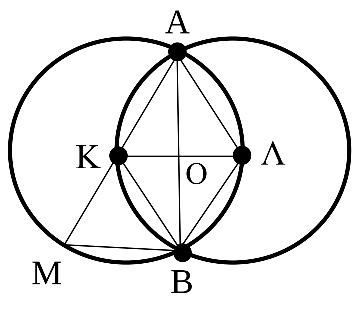
Μονάδες 12

Γ2. $BH = \frac{1}{2}\Gamma H$

Μονάδες 13

15. (4ο/2003)

Στο διπλανό σχήμα 3 βλέπουμε δύο τεμνόμενους κύκλους (Κ, ρ) και (Λ, ρ) με διάκεντρο ΚΛ = ρ. Τα σημεία Α και Β είναι κοινά για τους δύο κύκλους. ΑΒ είναι η κοινή τους χορδή.



σχήμα 3

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΚΑΛ είναι ισόπλευρο και το τετράπλευρο ΚΑΛΒ είναι ρόμβος.

9 Μονάδες

β) Να δείξετε ότι $\Lambda O = \frac{KA}{2}$

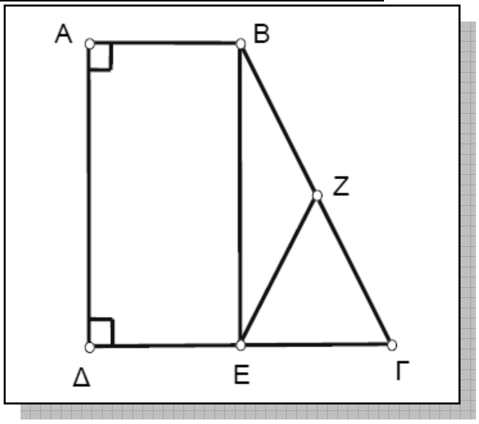
7 Μονάδες

γ) Αν ΑΜ είναι η διάμετρος του (Κ, ρ) κύκλου να δείξετε ότι ΚΛΒΜ είναι επίσης ρόμβος.

9 Μονάδες

16. (4ο/2012)

Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ με Α=Δ=90°, τα Ε,Ζ είναι μέσα των πλευρών ΓΔ και ΒΓ και ισχύει 2ΑΒ = ΓΔ = ΒΓ.
Να δείξετε ότι:



Δ1. Το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο. **Μονάδες 4**

Δ2. Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. **Μονάδες 4**

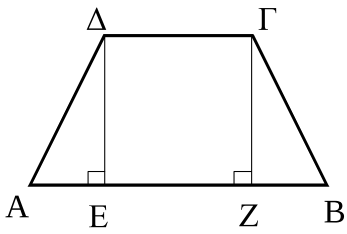
Δ3. $ΕΖ=\frac{1}{2}ΑΕ$. **Μονάδες 5**

Δ4. $ΔΖ \perp ΒΓ$. **Μονάδες 4**

Δ5. Το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο. **Μονάδες 8**

17. (4ο/2002 *περίοδος Σεπτεμβρίου*)

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε ένα ισοσκελές τραπέζιο με μεγάλη βάση ΑΒ. Θεωρούμε τα ύψη Δ Ε και Γ Ζ.

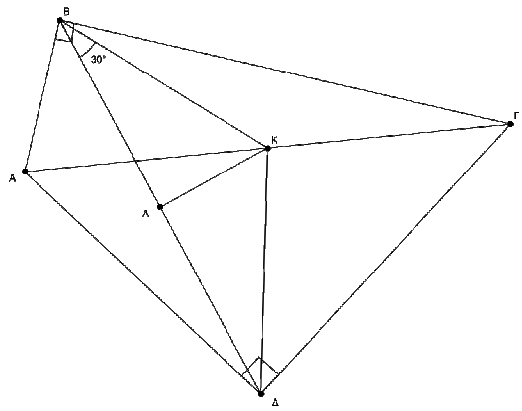


α. Να δείξετε ότι τα τμήματα ΑΕ και ΖΒ είναι ίσα. **13 Μονάδες**

β. Να δείξετε ότι $ΑΕ = \frac{ΑΒ - ΓΔ}{2}$. **12 Μονάδες**

18. (4ο/2013)

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχουμε Β=Δ=90° και τα Κ,Λ είναι μέσα των διαγωνίων ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:



Δ1. ΒΚ=ΚΔ **Μονάδες 7**

Δ2. $ΚΛ \perp ΒΔ$ **Μονάδες 8**

Δ3. Αν επιπλέον $Κ\hat{Β}Λ = 30^o$, δείξτε ότι $ΚΛ = \frac{ΑΓ}{4}$. **Μονάδες 10**

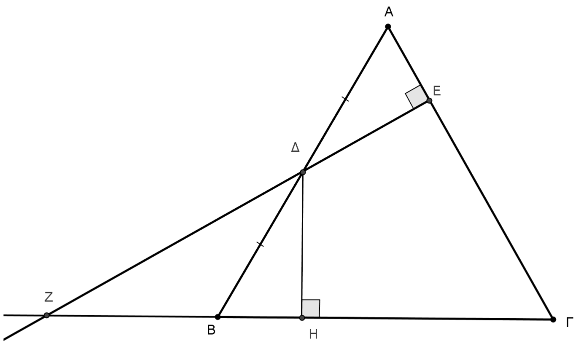
19. (2ο/2003 *περίοδος Σεπτεμβρίου*)

Από ένα σημείο εξωτερικό του κύκλου (Ο, R) φέρουμε τις εφα-πτομένες ΜΑ, ΜΒ του κύκλου. Προεκτείνουμε το ΟΒ κατά ίσο τμήμα ΒΓ.

α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΜΟΓ είναι ισοσκελές. Μονάδες 13

β. Να δείξετε ότι $Α\hat{Μ}Γ = 3Β\hat{Μ}Γ$. Μονάδες 12

20. (3ο/2014)



Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και Δ το μέσο της πλευράς ΑΒ. Φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΔΗ και ΔΕ προς τις πλευρές ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα.Επίσης η προέκταση της ΕΔ τέμνει την προέκταση της πλευράς ΓΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

Γ1. ΔΗ=ΔΕ. **Μονάδες 7**

Γ2. Το τετράπλευρο ΔΕΓΗ είναι εγγράψιμο. **Μονάδες 5**

Γ3. Το τρίγωνο ΔΒΖ είναι ισοσκελές. **Μονάδες 8**

Γ4. $ΑΕ=\frac{1}{6}ΓΖ$. **Μονάδες 5**

21. (4ο/2014)

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

Δ1. Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 8

Δ2. $\widehat{ΑΕΔ}=\widehat{ΒΖΓ}$

Μονάδες 8

Δ3. Οι ΔΕ και ΒΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΑΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Μονάδες 9

22. (3ο/2003 *περίοδος Σεπτεμβρίου*)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90^0$) και το ύψος του ΑΔ.

α. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $\widehat{ΕΔΖ} = \hat{Α} = 90^0$. Μονάδες 13

β. Αν Μ είναι το μέσο της ΕΖ, να δείξετε ότι $ΔΜ = \frac{ΒΓ}{4}$.

Μονάδες 12

23. (2ο/2015)

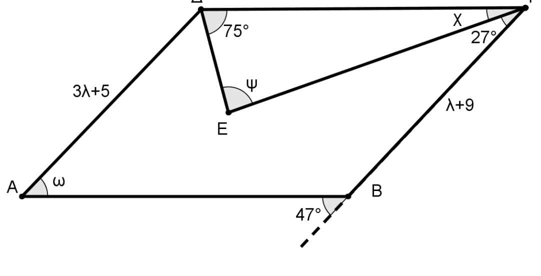
Στο διπλανό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ να υπολογίσετε:

Β1. Την γωνία ω. **Μονάδες 6**

Β2. Την γωνία χ. **Μονάδες 6**

Β3. Την γωνία ψ. **Μονάδες 6**

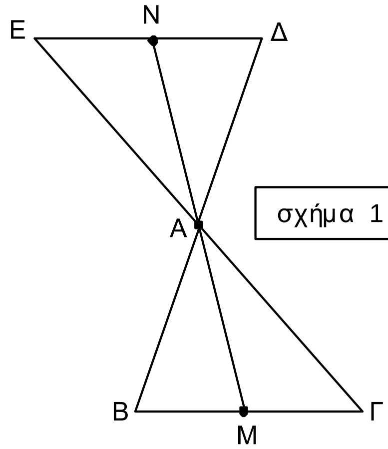
Β4. Τον αριθμό λ. **Μονάδες 7**



(Αιτιολογήστε τα παραπάνω αποτελέσματα)

24. (2ο/2016)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ κατά τμήματα ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα, ώστε ΒΑ = ΑΔ και ΓΑ = ΑΕ (*βλέπε σχήμα 1*). Επίσης ΑΜ, ΑΝ είναι οι διάμεσοι των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΕ αντίστοιχα.



σχήμα 1

Β1. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα.

Μονάδες 10

Β2. Δείξτε ότι ΑΜ = ΑΝ.

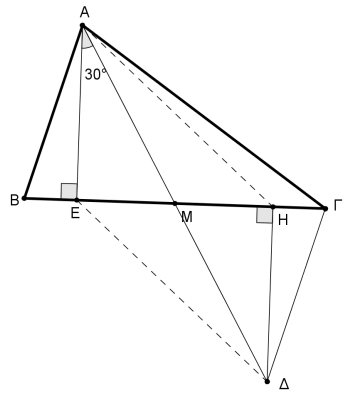
Μονάδες 10

Β3. Δείξτε ότι οι πλευρές ΕΔ, ΒΓ είναι παράλληλες.

Μονάδες 5

25. (3ο/2015)

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και το μέσο Μ της ΒΓ. Φέρνουμε την διάμεσο ΑΜ και την προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΜΔ=ΑΜ.



Γ1. Αποδείξτε ότι οι αποστάσεις ΑΕ και ΔΗ των κορυφών Α και Δ αντίστοιχα από την ΒΓ είναι ίσες.

Μονάδες 8

Γ2. Αποδείξτε ότι το ΑΕΔΗ είναι παραλληλόγραμμο.

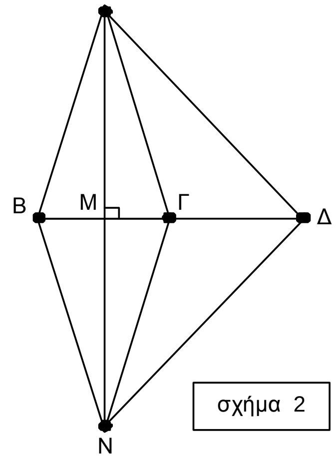
Μονάδες 8

Γ3. Αν επιπλέον $\mathrm{E\hat{A}M} = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι ΑΔ=2ΕΗ.

Μονάδες 9

26. (4ο/2016)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και ΑΜ το ύψος του το οποίο προεκτείνουμε κατά τμήμα ΜΝ = ΑΜ (βλέπε σχήμα 2). Επίσης προεκτείνουμε τη πλευρά ΒΓ κατά τμήμα ΓΔ = ΒΓ.



σχήμα 2

Δ1. Δείξτε ότι το τετράπλευρο ΑΒΝΓ είναι ρόμβος.

Μονάδες 8

Δ2. Δείξτε ότι το ΑΔΝ τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Μονάδες 7

Δ3. Δείξτε ότι το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του ΑΔΝ τριγώνου.

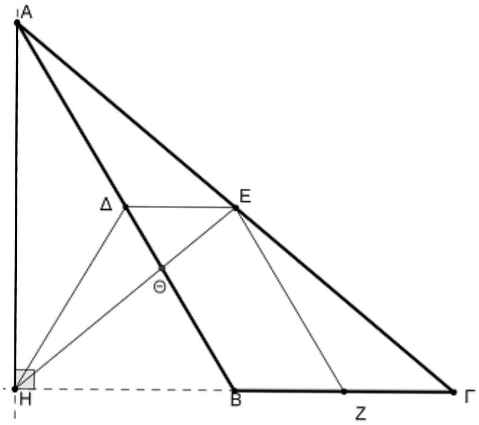
Μονάδες 6

Δ4. Πότε το σημείο Γ είναι και ορθόκεντρο του ΑΔΝ τριγώνου; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

27. (4ο/2015)

Δίνεται το αβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{B} > 90^\circ$) και τα σημεία Δ, Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ , ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα καθώς και το ύψος του ΑΗ.



Δ1. Αποδείξτε οτι το ΔΕΖΒ είναι παραλληλόγραμμο.
Μονάδες 5

Δ2. Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ΗΔΕ και ΕΖΓ είναι ίσα.
Μονάδες 8

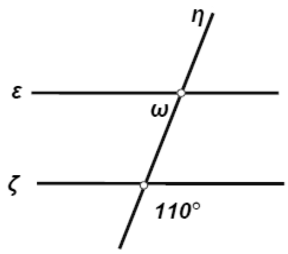
Δ3. Αποδείξτε ότι το ΗΔΕΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
Μονάδες 5

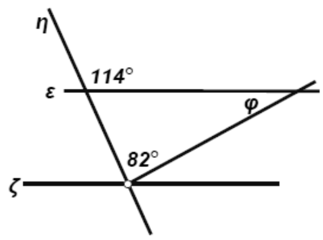
Δ4. Αν επιπλέον ΗΒ=ΒΓ, αποδείξτε ότι ΘΕ=$\frac{1}{6}$ΑΓ.
Μονάδες 7

28. (2ο/2017)

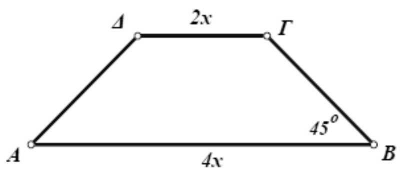
Β1. Να υπολογισθούν οι άγνωστες γωνίες $\hat{\omega}, \hat{\varphi}$, στα διπλανά σχήματα σημειώνοντας τις απαντήσεις στην κόλλα σας.

(Μον. 2Χ5=10)





Β2. Στο διπλανό σχήμα το τραπέζιο είναι ισοσκελές. Να υπολογισθούν συναρτήσει του x:
α) Το ύψος του
(Μον.7)
β) Η διάμεσός του
(Μον.8)



29. (4ο/2010 *περίοδος Σεπτεμβρίου*)

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την ΑΔ προς το Δ κατά τμήμα ΔΕ = ΑΔ. Φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΕΒ το οποίο τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Ζ.

α. Να δείξετε ότι το σημείο Ζ είναι το μέσο του ΕΒ. **Μονάδες 15**

β. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΖΒ είναι ισοσκελές. **Μονάδες 10**