ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ
Β΄ Λυκείου

Γενικής Παιδείας

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 5ο - Φ Υ Λ Λ Ο Νο 3

ΟΡΙΣΜΟΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ
ΑΜΕΣΕΣ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Ορισμός

$\log_\alpha \theta = x \Leftrightarrow \alpha^x = \theta, \quad 0 < \alpha \neq 1, \ \theta > 0, \ x \in IR$

Άμεσες Συνέπειες Ορισμού

- $\log_\alpha \alpha^x = x$, *ισχύουν οι περιορισμοί του ορισμού*
- $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \alpha$,
- $\log_\alpha \alpha = 1$,
- $\log_\alpha 1 = 0$.

Ιδιότητες Λογαρίθμων

Για $0 < \alpha \neq 1$, $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $\kappa \in IR$ ισχύουν :

1. $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$
2. $\log_\alpha \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$
3. $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \log_\alpha \theta$

Προσοχή !

- $\log_\alpha(x \cdot y) = \log_\alpha |x| + \log_\alpha |y|$, αν $x \cdot y > 0$
- $\log_\alpha x^\kappa = \kappa \log_\alpha |x|$, για κάθε $x \neq 0$, κ : άρτιο.

Ειδικοί Λογάριθμοι

Είναι $\textbf{log}\boldsymbol{\theta} = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$, για $\theta > 0$
(**Δεκαδικός Λογάριθμος**)
Ισχύουν επίσης : $\log 10 = 1$, $\log 1 = 0$, $\log 10^k = k$.

Είναι $\textbf{ln}\boldsymbol{\theta} = x \Leftrightarrow e^x = \theta$, για $\theta > 0$
(**Φυσικός ή Νεπέρειος Λογάριθμος**)
Ισχύουν επίσης : $\ln e = 1$, $\ln 1 = 0$, $\ln e^k = k$.

Αλλαγή Βάσης

Αν $0 < \alpha, \beta \neq 1$ και για κάθε $\theta > 0$, ισχύει :

$$\log_\beta \theta = \frac{\log_\alpha \theta}{\log_\alpha \beta}$$

Αλλαγή βάσης με **δεκαδικούς** λογάριθμους :

$$\log_\beta \theta = \frac{\log\theta}{\log\beta}$$

Αλλαγή βάσης με **φυσικούς** λογάριθμους :

$$\log_\beta \theta = \frac{\ln\theta}{\ln\beta}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τους λογάριθμους :

α) $\log_4 \frac{1}{64}$ **β)** $\log_{25} \sqrt{5}$

γ) $\log_{\sqrt{8}} 32$ **δ)** $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{2}$

ε) $\log_{\frac{1}{2}} \left(4\sqrt{2}\right)$ **στ)** $\log_{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{3}$

ζ) $\log_4 \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ **η)** $\log_{0,1} \left(10\sqrt{10}\right)$

2. Να υπολογίσετε τους λογάριθμους :

α) $\log 100$ **β)** $\log \frac{1}{10000}$

γ) $\log \frac{\sqrt{10}}{100}$ **δ)** $\ln e^3$

ε) $\ln \frac{\sqrt[3]{e^2}}{e}$ **στ)** $\log(\ln e^{100})$

ζ) $\ln(\log_7 7)$ **η)** $\log(\ln \sqrt[10]{e}\,)$

3. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

α) $e^{\ln(\log 100)}$ **β)** $10^{\log\left(\ln\sqrt{e}\right)}$

γ) $\left(\sqrt{e}\right)^{\ln 25}$ **δ)** $100^{\log 3}$

ε) $e^{3\ln 2}$ **στ)** $10^{1-\log 2}$

4. Να προσδιορίσετε τον αριθμό α :

α) $\log_\alpha 27 = 3$ **β)** $\log_{\sqrt{\alpha}} 8 = 3$ **γ)** $\log_\alpha 4 = -\frac{2}{3}$

5. Να προσδιορίσετε τον αριθμό x αν ισχύει :

α) $\log_3 x = 4$ **β)** $\log_9 x = \frac{1}{2}$ **γ)** $\ln x = 2$

δ) $\log_3 (|x| + 1) = 2$ **ε)** $\log_x 2x = 2$ **στ)** $\log_x (3x - 2) = 2$

6. Να δείξετε ότι :

α) $2\log 2 + 3\log 3 - \log 12 = 2\log 3$ **β)** $\frac{1}{2}\log 16 + \frac{1}{3}\log 8 + \frac{1}{4}\log 81 = 3\log 2 + \log 3$

γ) $\log_6 (12 + 6\sqrt{3}) + 2\log_6 (3 - \sqrt{3}) = 2$

δ) $\log 2 + \log(\sqrt{3} + 1) + \log(1 + \sqrt{2-\sqrt{3}}) + \log(1 - \sqrt{2-\sqrt{3}}) = 2\log 2$

ε) $\dfrac{\log\sqrt{125} + \log\sqrt{27} - \log\sqrt{8}}{\log 15 - \log 2} = \dfrac{3}{2}$

στ) $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{27}\right) = 0$

7. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $\ln(e^4 - e^3) - \ln(e - 1)$ **β)** $\log 40 - \log(3 - \sqrt{5}) - \log(3 + \sqrt{5})$

γ) $\dfrac{\log 7 + 3\log 2}{\log 2 + \log 28}$ **δ)** $\dfrac{\frac{1}{2}\log_4 25 + \log_4 40 - \frac{3}{2}}{\log_4 10 - \frac{1}{2}}$

ε) $10^{2\log 6 - \log 12}$ **στ)** $e^{\ln 24 - 3\ln 2}$

ζ) $\dfrac{10^{2-\frac{1}{2}\log 5}}{5^{\log\sqrt{1000}}}$ **η)** $\dfrac{\left(\sqrt{e}\right)^{\ln 8} \cdot e^{\log 1000}}{e^{3+\ln\sqrt{2}}}$

8. Αν $0 < \alpha \neq 1$ και $x, y, \omega > 0$ και ισχύει $\log_\alpha x = 5$, $\log_\alpha y = 4$ και $\log_\alpha \omega = 3$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $\log_\alpha \dfrac{\alpha^3\sqrt{x^4 y^3}}{\omega^4}$ **β)** $\ln \dfrac{x\omega}{y^2}$

9. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha, \beta > 0$, για τους οποίους ισχύει : $\alpha^2 + \beta^2 = 14\alpha\beta$.
Να δείξετε ότι : $\log(\alpha + \beta) - \log 4 = \frac{1}{2}(\log\alpha + \log\beta)$.

10. Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha, \beta \neq 1$, να αποδείξετε ότι :

α) $\log_{\alpha^6}\beta^4 \cdot \log_{\beta^2}\alpha^3 = 1$ **β)** $\log_\alpha\beta^2 \cdot \log_{\alpha^2}\beta = (\log_\alpha \beta)^2$