ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ
Α΄ Λυκείου

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 2ο - Φ Υ Λ Λ Ο Νο 1

ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να κάνετε τις πράξεις στις παραστάσεις που ακολουθούν :

   α) $3(\alpha - \beta) - 2(\alpha + \beta) + 3(2\alpha + \beta) - 2(\alpha - 2\beta)$

   β) $3x\psi - 2[3x - 2\psi(2 - 4x)]$

   γ) $-6 - 6[4 - 5[-3 - 4[2 - 3(x + 1)]]]$

2. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων που ακολουθούν :

   α) $4(x + \psi - 3x\psi) - x\psi[x - \psi + 2(x\psi - 1)]$, όταν $x = 1{,}22$ και $\psi = 5{,}66$.

   β) $5x - [3x - \psi - (-x + 2\psi - \omega) - 3\omega]$, όταν $x = 2$, $\psi = -\frac{1}{3}$ και $\omega = \frac{1}{2}$.

   γ) $2(x - 3\psi + 5\omega) - 3[x - 2(\psi - \omega)]$, όταν $\omega = \frac{1+x}{4}$.

3. Να βρεθεί για ποιές τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις :

   α) $\frac{x^3+1}{x}$ β) $\frac{2x+3}{x+1}$ γ) $\frac{\frac{x}{x-1}}{x+3}$ δ) $\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{x-2}$

   ε) $\frac{1+\frac{1}{x-4}}{1-\frac{1}{x+1}}$ στ) $\frac{1}{2x-1+\frac{3x-5}{3}}$ ζ) $\frac{x-2}{x^2+1}$

> ΠΡΟΣΟΧΗ :
>
> Πρέπει να θυμόμαστε ότι στην περίπτωση που έχουμε το πηλίκο της μορφής $\frac{\alpha}{\beta}$, ισχύει πάντα ότι $\beta \neq 0$, δηλ. ο παρονομαστής να μην μηδενίζεται για να ορίζεται το κλάσμα.

4. Αν οι αριθμοί $A = x - 3\psi + 4z$ και $B = \psi - x - 2z$ είναι αντίθετοι , να δείξετε ότι $\psi = z$.

5. Αν ο αριθμός α είναι αντίθετος του αριθμού β και ο β είναι αντίθετος του γ τότε να δείξετε ότι $\alpha = \gamma$.

> ΠΡΟΣΟΧΗ :
>
> Πρέπει να θυμόμαστε ότι δύο αριθμοί α, β , ονομάζονται αντίθετοι αν και μόνο αν $\alpha + \beta = 0$

6. Αν οι αριθμοί $A = 2x - 5\psi + \lambda$ και $B = \lambda^2 + 5\psi - 2x$ είναι αντίθετοι , να δείξετε ότι : $\lambda = 0$ ή $\lambda = -1$.

7. Να δείξετε οτι οι αριθμοί $x = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$, $\psi = \dfrac{\beta}{1 + \frac{\beta}{\alpha}}$,

με $(\alpha + \beta)\alpha\beta \neq 0$, είναι αντίστροφοι.

ΠΡΟΣΟΧΗ :

Υπενθυμίζουμε ότι δύο αριθμοί α, β, ονομάζονται αντίστροφοι, αν και μόνο αν ισχύει : $\alpha.\beta = 1$.

Ο αντίστροφος του α είναι ο αριθμός $\frac{1}{\alpha}$.

8. Να προσδιορίσετε τον αριθμό λ ώστε ο αριθμός

$\dfrac{2\lambda - 3}{2\lambda + 5}$ να είναι ίσος με τον αντίστροφό του.

(Απάντηση : $\lambda = -\frac{1}{2}$)

9. Αν $x + y = 40$ και $\frac{x}{3} = \frac{y}{7} = \frac{z}{10}$, να υπολογίσετε τους x, y, z.

10. Αν $3x + 4y - 2\omega = 6$ και $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{\omega}{4}$, βρείτε τους x, y, ω.

11. Αν $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$ να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω κλασμάτων :

α) $\dfrac{x+y}{x-y}$ β) $\dfrac{x-3y}{x+3y}$

γ) $\dfrac{5x-3y}{4x+7y}$ δ) $\dfrac{2xy-3y^2}{4x^2+y^2}$

ΠΡΟΣΟΧΗ :

Η ισότητα δύο λόγων δηλαδή κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$, ονομάζεται αναλογία και οι αριθμοί α, β, γ, δ ονομάζονται όροι της αναλογίας.

Ιδιότητες αναλογιών :

α) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$

β) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$

γ) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}$

δ) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

12. Αν $\dfrac{\alpha+2}{\alpha-1} = \dfrac{\alpha-3}{\alpha+1}$, με $\alpha \neq 1$ και $\alpha \neq -1$, δείξτε ότι : $\alpha = \frac{1}{7}$.

13. Αν είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, να δείξετε ότι : $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \dfrac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta}$.

14. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in IR^*$, $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma} = \dfrac{\gamma+\beta}{\alpha} = \dfrac{\alpha+\gamma}{\beta}$, να δείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma$.

15. Αν $\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}=\frac{4\alpha-\beta}{6\alpha-\beta}$, με $\beta \neq -\alpha$ και $6\alpha \neq -\beta$, να δείξετε ότι : $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2}{5}$.

16. Αν $\frac{x+y}{x-y}=\frac{7}{3}$, να υπολογίσετε τη τιμή του λόγου $\frac{x}{y}$.

(Απάντηση : $\frac{x}{y}=\frac{5}{2}$)

17. Να εξετάσετε ποιές από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστές και ποιές λάθος. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) $\frac{\alpha}{1}=\alpha$,

β) $\frac{-\alpha}{\alpha}=0$, με $\alpha \neq 0$,

γ) $\frac{0}{\alpha}=\alpha$, με $\alpha \neq 0$,

δ) $\frac{\alpha}{0}=0$,

ε) $\frac{\alpha+\gamma}{\alpha}=\gamma$, με $\alpha \neq 0$,

στ) $\frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma}=\frac{\beta}{\gamma}$, με $\alpha\gamma \neq 0$,

ζ) $\alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha\beta}{\gamma}$, με $\gamma \neq 0$,

η) $\alpha+\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha\gamma+\beta}{\gamma}$, με $\gamma \neq 0$,

θ) $\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}$, $\gamma\delta \neq 0$,

ι) $\alpha+\frac{1}{\alpha}=1$, $\alpha \neq 0$.