ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : **Π . Δ . ΤΡΙΜΗΣ**
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ
Α΄ Λυκείου

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 1ο - Φ Υ Λ Λ Ο Νο 4

ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εξετάσετε αν ισχύουν ή όχι οι επόμενοι ισχυρισμοί :

α) $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha, \quad \alpha \geq 0$,

β) $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$, για κάθε α πραγματικό ,

γ) $\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$, για κάθε α, β θετικούς πραγματικούς ,

δ) $\sqrt{(\alpha+\beta)^2} = |\alpha+\beta|$, για κάθε α, β πραγματικούς ,

ε) $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = |\alpha| + |\beta|$, για κάθε α, β πραγματικούς ,

στ) $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \alpha+\beta$, για κάθε α, β πραγματικούς ,

ζ) $\left(\sqrt{\alpha+\beta}\right)^2 = \alpha+\beta, \quad \mu\varepsilon \quad \alpha+\beta \geq 0$,

η) $\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2 = \alpha+\beta, \quad \mu\varepsilon \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0$,

θ) $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = 0$.

ΠΡΟΣΟΧΗ :

Ορισμός της τεραγωνικής ρίζας ενός θετικού πραγματικού αριθμού :

$\sqrt{\alpha} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \alpha, \quad \mu\varepsilon \quad \alpha \geq 0 \quad (1)$

δηλ. $\sqrt{\alpha}$ είναι η μη αρνητική λύση της εξίσωσης (1).

ΠΡΟΣΟΧΗ :

Ισχύει ότι : $\sqrt{\alpha}^2 = \alpha, \quad \alpha \geq 0$

$\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ :</u>

- $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0$
- $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta > 0$

ΠΡΟΣΟΧΗ **<u>ΔΕΝ</u>** ΙΣΧΥΕΙ :

$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha+\beta}$

$\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha-\beta}$

2. Για ποιές τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις :

α) $\sqrt{|x|-2}$ β) $\sqrt{\dfrac{2x-3}{5}-x}$

γ) $\sqrt{x^2+1}$ δ) $\sqrt{|x|+x}$

ΠΡΟΣΟΧΗ :

Πρέπει να γνωρίζουμε ότι σε μια ρίζα $\sqrt{\alpha}$, η υπόριζη ποσότητα δηλ. το α **πρέπει** να είναι : $\alpha \geq 0$, για να ορίζεται η ρίζα.

3. Να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων που ακολουθούν για $x \in IR$:

α) $A = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ β) $B = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(3-x)^2}$

4. Να εξετάσετε για ποιές τιμές του x η παράσταση : $B = \dfrac{(x-1)+\sqrt{(3x-1)^2}}{2x}$, $x \neq 0$, είναι ανεξάρτητη του x.

5. Αν $x = 1+\sqrt{2}$ και $y = 1+\sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι : $3x^2 - 6x + 3 = 2y^2 - 4y + 2$

6. Να γίνει απλούστερη η παράσταση : $2\sqrt{18} - \sqrt{54} + \sqrt{162} - \sqrt{24}$.

7. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $\sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{18}$ β) $3\sqrt{32} - 2\sqrt{50}$

γ) $8\sqrt{20} + 3\sqrt{80} - 2\sqrt{500}$ δ) $\left(\sqrt{16} - 3\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{9}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)$

8. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

α) $-\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{54}$

β) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{2+\sqrt{2}}$

9. Να απλοποιηθούν τα ριζικά :

α) $\sqrt{\sqrt[4]{16}}$ β) $\sqrt[9]{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^3}$

γ) $\sqrt[8]{\left(\sqrt{5}-2\right)^4}$ δ) $3\sqrt{12\alpha^2}$

10. Να υπολογίσετε τα γινόμενα : $(\alpha \geq 0)$

α) $\sqrt[5]{\alpha^2} \cdot \sqrt[15]{\alpha^4}$ β) $\sqrt[12]{\alpha^7} \cdot \sqrt[20]{\alpha^3} \cdot \sqrt[15]{\alpha^2}$

γ) $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\alpha^2} \cdot \sqrt[6]{\alpha^5}$ δ) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{\dfrac{1}{6}}$

ΠΡΟΣΟΧΗ :

Ορισμός νιοστής ρίζας πραγματικού αριθμού:

Αν $\alpha \geq 0$, $\sqrt[\nu]{\alpha} = x \Leftrightarrow x^\nu = \alpha$, με ν φυσικό αριθμό.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ :

- Αν $\alpha \geq 0$, $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha$
- $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \geq 0$
- $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$
- $\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\kappa$, $\alpha \geq 0$, κ θετικός ακέραιος
- $\alpha\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta}$, $\alpha, \beta \geq 0$, κ θετικός ακέραιος
- $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\nu\mu]{\alpha}$, $\alpha \geq 0$, ν, μ θετικοί ακέραιοι
- $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$, $\alpha \geq 0$, ν, μ, ρ θετικοί ακέραιοι

11. Να αποδείξετε ότι : $\sqrt{\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{4}} + \sqrt{\dfrac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{4}} = \sqrt{3}$

12. Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή :

α) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ β) $\dfrac{8}{\sqrt[3]{16}}$

ΠΡΟΣΟΧΗ :

Απαλοιφη από τον παρονομαστή κλάσματος , μιας παράστασης με ρίζες. Πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και παρονομαστή του κλάσματος με κατάλληλη, σε κάθε περίπτωση, παράσταση, ώστε να απαλοιφεί από τον παρονομαστή η ρίζα ή οι ρίζες.
Στις παρακάτω περιπτώσεις έχουμε τον μετασχηματισμό των κλασμάτων σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.
Οι παραστάσεις με τις οποίες πολ/ζουμε τους όρους του κλάσματος ονομάζονται **συζυγές παραστάσεις** των παρονομαστών .
Προσοχή! Τα παρακάτω ισχύουν για τις τιμές των α, β που ορίζονται οι παραστάσεις και για ν θετικό ακέραιο, μ ακέραιο.

- $\dfrac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}} = \dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}\cdot\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}} = \dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu-\mu}}} = \dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}}} = \dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}}{\alpha}$
- $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} = \dfrac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)} = \dfrac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2-\left(\sqrt{\beta}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\alpha-\beta}$
- $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}} = \dfrac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)} = \dfrac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2-\left(\sqrt{\beta}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\alpha-\beta}$

13. Ομοίως :

α) $\dfrac{4}{3-\sqrt{2}}$ β) $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$

γ) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ δ) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

ε) $\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ στ) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

14. Να δείξετε ότι ο αριθμός : $A = \dfrac{3}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}} - \dfrac{3}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$ είναι ρητός .

15. Να αποδείξετε ότι : $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

16. Με την προϋπόθεση ότι ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις, να τις απλοποιήσετε :

α) $\dfrac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}} + \dfrac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$ β) $\sqrt{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}} + \sqrt{\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$

17. Να δείξετε ότι : αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, τότε $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} > \sqrt{\alpha+\beta}$,

18. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $x^3 - 8 = 0$ β) $x^4 + 1 = 0$

γ) $x^5 - x^2 = 0$ δ) $x^4 - 9x^2 = 0$

ε) $x^5 - 5x^2 = 0$ στ) $64y^3 - y = 0$

ζ) $8x^3 - 1 = 0$ η) $x^5 - 8x^2 = 0$

θ) $x^5 - 16x = 0$ ι) $x^4 + x = 0$

ΠΡΟΣΟΧΗ :

Επίλυση της εξίσωσης : $x^{\nu} = \alpha$. (ν φυσικός)
Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

- ν άρτιος , $\alpha > 0$: $x^{\nu} = \alpha \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{\alpha}$ ή $x = -\sqrt[\nu]{\alpha}$,
- ν άρτιος, $\alpha < 0$: $x^{\nu} = \alpha$, είναι **αδύνατη ,**
- ν περιττός, $\alpha > 0$: $x^{\nu} = \alpha \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{\alpha}$,
- ν περιττός, $\alpha < 0$: $x^{\nu} = \alpha \Leftrightarrow x = -\sqrt[\nu]{|\alpha|}$