ΛΥΚΕΙΟ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : **Π . Δ . ΤΡΙΜΗΣ**
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ
1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Θετική Τεχνολογική Κατεύθυνση

Ασκήσεις

(ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

1 Νο

ΕΥΡΕΣΗ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΙΜΩΝ

1. Να υπολογίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης : $f(x)=\dfrac{\eta\mu x+\sqrt{x-1}}{\ln(x+1)}$

2. Να προσδιορισθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

α) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x-2}$ β) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$ γ) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x-1}$

δ) $f(x)=\sqrt{\ln x-1}$ ε) $f(x)=\dfrac{1}{1-\varepsilon\varphi^2 x}$ στ) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+|x|}$

ζ) $f(x)=\sqrt{\log(1-x)}$ η) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$ θ) $f(x)=\log_{x-1}(x^2-4)$

ι) $f(x)=\sqrt{\eta\mu x-1}$ ια) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x+4}}$ ιβ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+4}}$

ιγ) $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ ιδ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-|x|}$ ιε) $f(x)=\sqrt[3]{8-|x+1|}$

ιστ) $f(x)=(x^2-x-2)^{2x-3}$

3. Να ορισθεί ο μ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x^2+2\mu x+4)}$ να έχει πεδίο ορισμού το IR.

4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2-\alpha x+1}{x^2+x+1}$. Να ορισθεί ο πραγματικός αριθμός α, ώστε $f(A)\subseteq[-2, 2]$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{x^2+\lambda x}{x^2-2x-3}$. Να προσδιορισθεί ο λ, ώστε το σύνολο τιμών της f να είναι της μορφής $(-\infty,\alpha]\cup[\beta,+\infty)$, $\alpha,\beta\in IR$.

(Απ. $\lambda \in (-3,1)$)

6. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης :

$$f(x)=\begin{cases}-2x+3 & \alpha\nu \quad x\in(-\infty,-2)\\ 7 & \alpha\nu \quad x\in[-2,3)\\ 2x+1 & \alpha\nu \quad x\in[3,+\infty)\end{cases}$$

7. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

α) Να υπολογίσετε το πεδίο ορισμού της.
β) Να υπολογισθεί το σύνολο τιμών της.

8. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο IR και έχει πεδίο τιμών το IR. Να βρεθεί το πεδίο τιμών της συνάρτησης :

$$h(x)=\frac{2f(x)}{1+\left(f(x)\right)^2}$$

9. Αν για την συνάρτηση f ισχύει : $xf(x)+f(1-x)=x$ για κάθε $\chi\in IR$, τότε να βρείτε τον τύπο της f και το πεδίο τιμών της.

10. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο IR, και για κάθε $x\in IR$, ισχύει :

$$f(x)+2f(-x)=\frac{3\alpha x}{1+x^2}\ ,\quad \alpha\neq 0.$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f.
β) Να βρείτε τις τιμές του α ώστε το πεδίο τιμών της f να είναι το διάστημα [-4, 4].

ΤΥΠΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

11. Να γίνουν πολλαπλού τύπου οι συναρτήσεις :

α) $f(x)=|x^2-9|$ β) $f(x)=|x-1|+|x-2|$

12. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

$$f(x) = \alpha x^2 - x + 1 \quad \text{και} \quad g(x) = 2\alpha x - 1, \quad \alpha \in IR.$$

13. Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

$\psi = (\alpha+1)x^2 - 3\alpha x + 2\alpha - 1$ όταν ο α διατρέχει το $IR-\{-1\}$ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

14. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : IR \to IR$, για την οποία ισχύει :

$$g(x+\psi)+g(x-\psi)=2g(x)g(\psi) \quad \forall\, x, \psi \in IR \quad (1)$$

α) Να δειχθεί ότι $g(0) = 0$ ή $g(0) = 1$.
β) Να βρεθούν οι σταθερές συναρτήσεις που ικανοποιούν την (1).

15. Αν για κάθε $x \neq 0$ ισχύει : $xf(x)+2f\left(-\frac{1}{x}\right)=3$, να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

16. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο IR. Αν για κάθε $x \in IR$ ισχύει :

$$\alpha f(x) + \beta f(1-x) = x, \quad \text{όπου } \alpha + \beta \neq 0,$$

τότε να αποδειχθεί ότι :

α) $f(x)+f(1-x)=\dfrac{1}{\alpha+\beta}$, $x \in IR$

β) Αν $\alpha \neq \beta$ τότε $f(x)=\dfrac{x}{\alpha-\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha^2-\beta^2}$, $x \in IR$

ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

17. Δίνονται οι συναρτήσεις f με τύπο $f(x)=\dfrac{2\kappa x+1-\kappa}{x+\kappa+2}$ και g με τύπο $g(x)=\dfrac{(\kappa^2-3)x+2\kappa-8}{x+2\kappa-1}$. Να προσδιορισθεί ο $\kappa \in IR$, ώστε να είναι $f = g$.

18. Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $A \subseteq IR$, και για κάθε $x \in A$ ισχύει :

$$2(f+g)(x)\,[(f+g)(x)-2x] \leq [(f+g)(x)]^2 - [(f-g)(x)]^2 - 4x^2$$

Να αποδειχθεί ότι : $f = g$.

ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

19. Αν $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ και $g(x)=\sqrt{1+x}$ να βρείτε (αν υπάρχουν) τις συναρτήσεις fog, fof.

20. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους :

$$f(x)=\begin{cases}2x^2 & ,\ x\in[0,1)\\ 4x-2 & ,\ x\in[1,3)\end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases}2x-1 & ,\ x\in[-2,4)\\ \sqrt{x} & ,\ x\in[4,+\infty)\end{cases}$$

Να ορισθεί η συνάρτηση fog.

21. Αν $f(x)=\begin{cases}2x & ,\ -2<x<1\\ 1+x & ,\ 1\le x<3\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & ,\ x\le 0\\ x^2 & ,\ x>0\end{cases}$, τότε να βρείτε την συνάρτηση fog.

22. Αν μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα [0, 6], να βρεθεί το πεδίο ορισμού της h με $h(x) = f(x^2 - 2)$.

23. Να βρεθεί η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το IR, αν $(fog)(x) = x^2 + 4x - 1$ και $g(x) = x - 2$.

24. Αν $f(x) = 2x - 1$ και $(gof)(x) = 1 + x^2$, $x \in$ IR να προσδιορίσετε το g(x).

25. Δίνεται η συνάρτηση f : IR-{3} → IR, με τύπο $f(x) = \dfrac{-\alpha x}{3-x}$. Να προσδιορισθεί ο $\alpha \in$ IR, ώστε $(f \circ f)(x) = x$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ “1 - 1”
ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

26. Ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι “1 - 1” ;

α) $f(x)=\dfrac{2x}{x+3}$

β) $f(x)=2+\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$

γ) $f(x)=x^4+\sigma\upsilon\nu x$

δ) $f(x)=x|x|$

27. Οι συναρτήσεις f,g είναι ορισμένες στο IR και για κάθε πραγματικό x ισχύει :

$$(g \circ g)(x) = \alpha g(x) + \beta f(x^3),$$

όπου α,β $\in$ IR*. Αν η f είναι συνάρτηση “1 - 1”, να αποδείξετε ότι η g είναι “1 - 1”.

28. Δίνεται η συνάρτηση g : IR $\to$ IR, με :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & , \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

α) Να δειχθεί ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρεθεί, αν υπάρχει, η αντίστροφη συνάρτηση της g.

29. Να εξεταστεί αν αντιστρέφεται η συνάρτηση f με f(x) = ημx και με σύνολο τιμών το διάστημα B = [-1, 1].

30. Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x-2}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρεθεί, αν υπάρχει, η αντίστροφη συνάρτηση της f, καθώς και το σύνολο τιμών της.

31. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο IR με σύνολο τιμών το IR.
Αν για κάθε x $\in$ IR ισχύει f(f(x)) = x + f(x), τότε να αποδείξετε ότι :

α) Η f είναι αντιστρέψιμη. β) f(0) = 0.

γ) $f(x) = x + f^{-1}(x)$, x $\in$ IR.

32. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x$, $x \in [2, +\infty)$ είναι αντιστρέψιμη και κατόπιν να βρείτε την συνάρτηση $f^{-1}(x)$.

33. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 1 - x^3$ είναι αντιστρέψιμη και έπειτα να βρείτε την $f^{-1}(x)$.

34. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 , & x \le 0 \\ -2x , & x > 0 \end{cases}$ είναι “1 - 1” και κατόπιν να βρείτε την $f^{-1}(x)$.

35. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο :

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)+\beta\,, & x \in [2, +\infty) \\ \lambda(x-2)+\beta\,, & x \in (-\infty, 2) \end{cases}$$

Να προσδιορισθεί ο $\lambda \in IR$, ώστε να υπάρχει η αντίστροφή της συνάρτησης και να βρεθεί.

(Απ. $\lambda > 0$)

36. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2\alpha + x\,, & x \le 1 \\ 2x+3\,, & x > 1 \end{cases}$. Προσδιορίστε το α ώστε η f να είναι “1 - 1” και μετά να βρείτε την f^{-1}.

37. α) Δίνεται η συνάρτηση $f : IR \to IR$, με

$$f(x) = \alpha x + \beta \quad (\alpha,\beta \in IR,\ \alpha \neq 0).$$

Να προσδιορισθούν οι α,β, ώστε να υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της f και ακόμα να είναι $f^{-1} = f$.

β) Για την συνάρτηση $f : IR \to IR$, με $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$ ισχύει :

$$f(x) + f(1 - x) + f^{-1}(1 + x) = x, \quad \forall\, x \in IR$$

Να βρεθούν τα α,β.

38. Δίνεται η συνάρτηση $f : IR - \{1\} \to IR - \{2\}$, με $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

α) Να δειχθεί ότι ορίζεται η αντίστροφη της συνάρτησης f και να βρεθεί.

β) Να βρεθούν τα $x \in IR$, ώστε να ισχύει : $(f \circ f^{-1})(x) = x$.

39. Δίνεται η συνάρτηση $f : A \to [\,0, +\infty)$, με $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$.

α) Να δειχθεί ότι $A = [\,0, 1)$.

β) Να δειχθεί ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της f και να βρεθεί.

40. Δίνεται συνάρτηση $f : IR \to IR$, η οποία έχει σύνολο τιμών το IR και ικανοποιεί τη σχέση : $f^3(x) + 3f(x) + x - 2 = 0$, για κάθε $x \in IR$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1 - 1$.

β) Να βρείτε την f^{-1}.