



Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 3ο - Φ Υ Λ Λ Ο Νο 6

**ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΓΩΝΙΩΝ**

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

1. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων :

α)  $\text{συν}\frac{\pi}{18}\text{συν}\frac{\pi}{9} - \eta\mu\frac{\pi}{18}\eta\mu\frac{\pi}{9}$

β)  $\text{συν}18^\circ\text{συν}27^\circ - \eta\mu18^\circ\eta\mu27^\circ$

γ)  $\text{συν}\frac{\pi}{5}\text{συν}\frac{\pi}{20} - \eta\mu\frac{\pi}{5}\eta\mu\frac{\pi}{20}$

δ)  $\text{συν}\frac{\pi}{7}\text{συν}\frac{9\pi}{14} - \eta\mu\frac{\pi}{7}\eta\mu\left(-\frac{9\pi}{14}\right)$

ε)  $\text{συν}120^\circ\text{συν}30^\circ + \eta\mu120^\circ\eta\mu30^\circ$

2. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων :

α)  $\eta\mu\frac{13\pi}{12}\text{συν}\frac{7\pi}{12} - \text{συν}\frac{13\pi}{12}\eta\mu\frac{7\pi}{12}$

β)  $\eta\mu40^\circ\text{συν}5^\circ + \text{συν}40^\circ\eta\mu5^\circ$

γ)  $\eta\mu65^\circ\text{συν}25^\circ + \text{συν}65^\circ\eta\mu25^\circ$

δ)  $\text{συν}(30^\circ + \alpha)\text{συν}(30^\circ - \alpha) - \eta\mu(30^\circ + \alpha)\eta\mu(30^\circ - \alpha)$

ε)  $\eta\mu(60^\circ - \alpha)\text{συν}(30^\circ + \alpha) + \eta\mu(30^\circ + \alpha)\text{συν}(60^\circ - \alpha)$

**ΠΡΟΣΟΧΗ :**

**Συνημίτονο αθροίσματος και διαφοράς γωνιών :**

- $\text{συν}(\alpha + \beta) = \text{συν}\alpha\text{συν}\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$
- $\text{συν}(\alpha - \beta) = \text{συν}\alpha\text{συν}\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$

**Ημίτονο αθροίσματος και διαφοράς γωνιών :**

- $\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha\text{συν}\beta + \text{συν}\alpha\eta\mu\beta$
- $\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha\text{συν}\beta - \text{συν}\alpha\eta\mu\beta$

**Εφαπτομένη αθροίσματος και διαφοράς γωνιών :**

- $\text{εφ}(\alpha + \beta) = \frac{\text{εφ}\alpha + \text{εφ}\beta}{1 - \text{εφ}\alpha\text{εφ}\beta}$
- $\text{εφ}(\alpha - \beta) = \frac{\text{εφ}\alpha - \text{εφ}\beta}{1 + \text{εφ}\alpha\text{εφ}\beta}$

**Συνεφαπτομένη αθροίσματος και διαφοράς γωνιών :**

- $\text{σφ}(\alpha + \beta) = \frac{\text{σφ}\alpha\text{σφ}\beta - 1}{\text{σφ}\beta + \text{σφ}\alpha}$
- $\text{σφ}(\alpha - \beta) = \frac{\text{σφ}\alpha\text{σφ}\beta + 1}{\text{σφ}\beta - \text{σφ}\alpha}$

στ)  $\frac{\text{εφ}\frac{3\pi}{20} + \text{εφ}\frac{\pi}{10}}{1 - \text{εφ}\frac{3\pi}{20} \cdot \text{εφ}\frac{\pi}{10}}$

3. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων :

$$\alpha) \frac{\varepsilon\varphi \frac{3\pi}{28} + \varepsilon\varphi \frac{\pi}{7}}{1 - \varepsilon\varphi \frac{3\pi}{28} \cdot \varepsilon\varphi \frac{\pi}{7}}$$

$$\beta) \frac{\varepsilon\varphi 73^\circ - \varepsilon\varphi 13^\circ}{1 + \varepsilon\varphi 73^\circ \varepsilon\varphi 13^\circ}$$

$$\gamma) \frac{\varepsilon\varphi 45^\circ - \varepsilon\varphi 15^\circ}{1 + \varepsilon\varphi 45^\circ \varepsilon\varphi 15^\circ}$$

4. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις :

$$\alpha) \text{ συν}(-4x)\text{συν}x - \eta\mu 4x\eta\mu(-x)$$

$$\beta) \text{ συν}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\text{συν}x + \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\eta\mu x$$

$$\gamma) \eta\mu \frac{x}{3}\text{συν} \frac{2x}{3} + \text{συν} \frac{x}{3}\eta\mu \frac{2x}{3}$$

$$\delta) \eta\mu\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\text{συν}\alpha - \text{συν}\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\eta\mu\alpha$$

$$\varepsilon) \frac{\varepsilon\varphi\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{12}\right)}{1 - \varepsilon\varphi\left(x + \frac{\pi}{12}\right) \cdot \varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{12}\right)}$$

$$\sigma\tau) \frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) - \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)}{1 - \varepsilon\varphi\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)}$$

5. Να δείξετε ότι είναι ανεξάρτητη του  $x$  η παράσταση :  $A = \frac{\eta\mu(\alpha + x) - \eta\mu(\alpha - x)}{\text{συν}(\beta - x) - \text{συν}(\beta + x)}$ .

6. Ομοίως για την παράσταση :  $B = \frac{\text{συν}(\alpha + x) + \text{συν}(\alpha - x)}{\eta\mu(\alpha + x) + \eta\mu(\alpha - x)}$ .

7. Να επαληθεύσετε τις ισότητες :

$$\alpha) \text{ συν}(\pi - x) = -\text{συν}x$$

$$\beta) \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\text{συν}x$$

$$\gamma) \varepsilon\varphi(\pi - x) = -\varepsilon\varphi x$$

$$\delta) \eta\mu(\pi + x) = -\eta\mu x$$

8. Να αποδείξετε ότι :  $\frac{\text{συν}\alpha + \eta\mu\alpha}{\text{συν}\alpha - \eta\mu\alpha} = \varepsilon\varphi(45^\circ + \alpha)$ .

9. Να αποδείξετε ότι :  $\frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta} = \frac{\eta\mu(\alpha + \beta)}{\eta\mu(\alpha - \beta)}$

10. Να αποδείξετε ότι : α)  $\frac{2\eta\mu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)} = \epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta$

β)  $\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3 - 4\eta\mu^2\alpha}$

γ)  $\sigma\upsilon\nu\alpha + \sqrt{3}\eta\mu\alpha = 2\sigma\upsilon\nu\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$

11. Να δείξετε ότι :

α)  $\eta\mu(\alpha + \beta)\eta\mu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$

β)  $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta = \sigma\upsilon\nu^2\beta - \eta\mu^2\alpha$

12. Να δείξετε ότι :  $\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2}\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ .

13. Να αποδείξετε ότι :  $\eta\mu\alpha.\eta\mu(\beta - \gamma) + \eta\mu\beta.\eta\mu(\gamma - \alpha) + \eta\mu\gamma.\eta\mu(\alpha - \beta) = 0$

14. Να αποδείξετε ότι :

α)  $\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\eta\mu x$       β)  $\sigma\upsilon\nu^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = 1$

γ)  $(\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta)^2 + (\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta)^2 = 2[1 - \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)]$

δ)  $(\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha)\epsilon\phi\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha$

15. Να δείξετε ότι : α)  $\frac{\eta\mu\frac{\pi}{5}}{\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{5}} + \frac{\eta\mu\frac{4\pi}{5}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{5}} = 0$       β)  $\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7}}{\eta\mu\frac{3\pi}{14}} + \frac{\eta\mu\left(-\frac{2\pi}{7}\right)}{\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{14}} = 0$ .

16. Να δείξετε ότι :  $\sigma\upsilon\nu^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sigma\upsilon\nu^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ .

17. Αν είναι  $\eta\mu\alpha = \frac{9}{41}$ ,  $\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{5}{13}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  και  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$  να υπολογίσετε :

α)  $\eta\mu(\alpha - \beta)$

β)  $\epsilon\phi(\alpha + \beta)$

18. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\alpha + \beta$ , όταν :

$$\eta\mu\alpha = \frac{15}{17}, \quad \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{12}{13}, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad \text{και} \quad \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi.$$

19. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\alpha - \beta$ , όταν :

$$\eta\mu\alpha = \frac{5}{13}, \quad \epsilon\phi\beta = -\frac{3}{4}, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad \text{και} \quad \frac{\pi}{2} < \beta < \pi.$$

20. Αν  $\alpha - \beta = \frac{5\pi}{4}$  και  $\epsilon\phi\alpha = -\frac{2}{3}$  να υπολογίσετε την  $\epsilon\phi\beta$ .

21. α) Αν  $x + \psi = \frac{\pi}{4}$  και  $\epsilon\phi\psi = \frac{3}{4}$ , να δείξετε ότι :  $\epsilon\phi x = \frac{1}{7}$ .

β) Αν  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$  και  $\epsilon\phi x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ ,  $\epsilon\phi\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , να δείξετε ότι :

$$x - \psi = \frac{\pi}{4}.$$

γ) Αν  $x + \psi = \frac{\pi}{4}$ , να δείξετε ότι :  $(1 + \epsilon\phi x)(1 + \epsilon\phi\psi) = 2$ .

22. Να δείξετε ότι :  $\frac{\eta\mu(\alpha + \beta)\eta\mu(\alpha - \beta)}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta} = \epsilon\phi^2\alpha - \epsilon\phi^2\beta$ .

23. Αν  $\eta\mu(\alpha - \beta) = 0$ , να δείξετε ότι :  $\sigma\upsilon\nu(2\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu\beta$ .

24. Αν  $\epsilon\phi\alpha = \sigma\phi\beta + 2\epsilon\phi\beta$ , να δείξετε ότι :  $\sigma\phi\beta = 2\epsilon\phi(\alpha - \beta)$ .

25. Να δείξετε ότι :  $\frac{2\eta\mu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)} = \epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta$ .

26. Αν  $\eta\mu A = \eta\mu B$  και  $\sigma\upsilon\nu A = \sigma\upsilon\nu B$ , δείξτε ότι :  $A - B = 2\kappa\pi$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$ .

27. Να λύσετε την εξίσωση :  $2\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ .

28. Να λύσετε την εξίσωση :  $\epsilon\phi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sigma\phi x = 1$  .

29. Να λύσετε την εξίσωση :  $\frac{1-\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$  , όταν  $x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$  .

30. Να λυθεί η εξίσωση :  $\frac{1+\sqrt{3}}{2}\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  , όταν  $x \in [0, 2\pi]$  .

31. Να λύσετε την εξίσωση :  $\epsilon\phi\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \epsilon\phi 2x = 1$  , για  $x \in [0, 2\pi]$  .

32. Αν  $\epsilon\phi\alpha = 5$  , να λύσετε στο διάστημα  $[0, 2\pi]$  , την εξίσωση :

$$2\eta\mu(x + \alpha) = 3\eta\mu(\alpha - x)$$

33. Αν  $\sigma\phi\alpha = -\frac{1}{8}$  , να λύσετε στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$  , την εξίσωση :

$$7\sigma\upsilon\nu(x - \alpha) = -9\sigma\upsilon\nu(x + \alpha).$$

34. Να προσδιορίσετε τους  $x, y \in \mathbb{R}$  όταν :

α)  $\eta\mu(x + y) + \eta\mu(x - y) = -2$

β)  $\eta\mu(x - y) + \sigma\upsilon\nu(x + y) = 2$

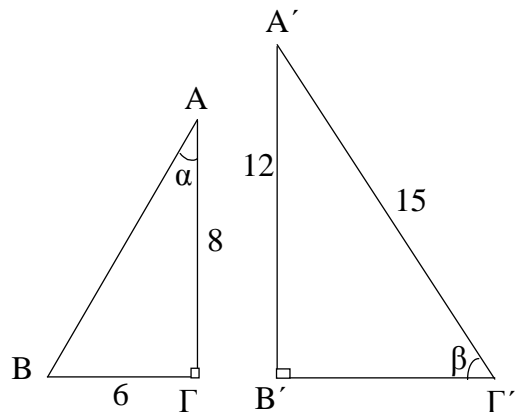
35. Αν  $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  , να δείξετε ότι :  $\eta\mu(\alpha + \beta) < \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta$  .

36. Αν  $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  , να δείξετε ότι :  $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) < \eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha$

37. Να αποδείξετε ότι για τις γωνίες  $\alpha, \beta$  των ορθογωνίων τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  του διπλανού σχήματος ισχύει :

α)  $\eta\mu(\alpha - \beta) = -\frac{7}{25}$

β)  $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) > \frac{23}{25}$



38. Αν στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι

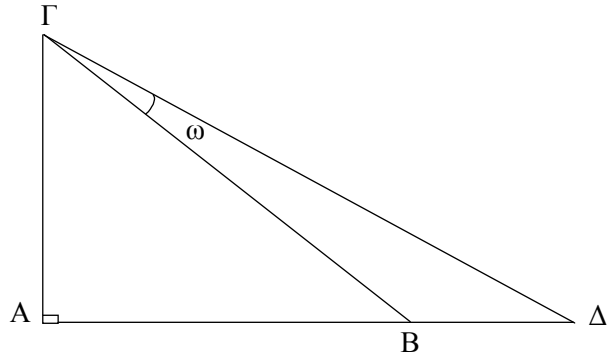
$$A\Delta = \frac{3}{2} A\Gamma$$

τότε :

α) Δείξτε ότι :  $\epsilon\phi\omega = \frac{3 - 2\epsilon\phi\Gamma}{2 + 3\epsilon\phi\Gamma}$  .

β) Αν  $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ , να λυθεί η εξίσωση :

$$x^2 - 15\epsilon\phi\omega \cdot x + \frac{4}{3}\epsilon\phi A\Gamma\Delta = 0 .$$



39. Αν σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει :  $\frac{\eta\mu B \sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu A} = \frac{1}{2}$ , να δείξετε ότι είναι ισοσκελές.

40. Αν σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει :  $\frac{\sigma\upsilon\nu(B - \Gamma)}{\eta\mu A + \eta\mu(B - \Gamma)} = \sigma\phi B$ , να δείξετε ότι είναι ορθογώνιο.

41. Να σημειώσετε ποιές από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές και ποιές όχι :

α)  $\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta$

β)  $\sigma\upsilon\nu 15^\circ = \sigma\upsilon\nu 45^\circ - \sigma\upsilon\nu 30^\circ$

γ)  $\sigma\upsilon\nu 75^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}$

δ)  $\epsilon\phi(\alpha + \beta) = \frac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta}$ . Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

42. Είναι σωστό ή λάθος ότι σε κάθε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύουν :

α)  $\eta\mu A = \eta\mu(B + \Gamma)$

β)  $\epsilon\phi A = -\epsilon\phi(B + \Gamma)$

γ)  $\eta\mu \frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{B + \Gamma}{2}$

δ)  $\epsilon\phi \frac{A}{2} = \sigma\phi \frac{B + \Gamma}{2}$

43. Είναι σωστό ή λάθος ότι σε κάθε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύουν :

α)  $0 < \eta\mu x \leq 1$

β)  $0 < \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} < 1$

όπου  $x$  οποιαδήποτε γωνία του  $AB\Gamma$  τριγώνου.

44. Δίνεται η εξίσωση :  $2\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ . Να σημειώσετε ποιά είναι η σωστή λύση της :

$$A : x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in Z$$

$$B : x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in Z$$

$$\Gamma : x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in Z$$

$$\Delta : x = \frac{\pi}{3}$$

$$E : x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in Z$$

$$\Sigma T : x = \frac{\pi}{6}$$

45. Δίνεται ότι  $\sigma\phi\alpha = -2$  και η εξίσωση  $\sigma\upsilon\nu(x + \alpha) = 3\sigma\upsilon\nu(x - \alpha)$ , με  $x \in [0, 2\pi]$ .  
Να σημειώσετε ποιά είναι η σωστή λύση της παραπάνω εξίσωσης .

$$A : x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in Z$$

$$B : x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in Z$$

$$\Gamma : x = 1$$

$$\Delta : x = \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = \frac{5\pi}{4}$$

$$E : x = 0 \text{ ή } x = \frac{\pi}{2}$$

46. Οι παρακάτω ισότητες είναι σωστές ή λάθος ;

α)  $\eta\mu(\alpha + \beta) - \eta\mu(\alpha - \beta) = 2\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$

β)  $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta$

γ)  $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$