



Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 3ο - Φ Υ Λ Λ Ο Νο 7

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ 2α

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

1. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων :

α)  $\eta\mu \frac{\pi}{12} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{12}$

β)  $1 - 2\eta\mu^2 \frac{\pi}{8}$

γ)  $2\eta\mu \frac{\pi}{6} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6}$

δ)  $2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{8} - 1$

ε)  $1 - 2\eta\mu^2 75^\circ$

στ)  $\eta\mu^2 \frac{\pi}{12}$

ζ)  $\frac{2\varepsilon\varphi 22,5^\circ}{1 - \varepsilon\varphi^2 22,5^\circ}$

η)  $2\eta\mu 15^\circ \eta\mu 75^\circ$

ΠΡΟΣΟΧΗ :

**Ημίτονο της γωνίας 2α :**

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$$

**Συνημίτονο της γωνίας 2α :**

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu 2\alpha &= \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \\ &= 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = \\ &= 1 - 2\eta\mu^2\alpha \end{aligned}$$

**Εφαπτομένη της γωνίας 2α :**

$$\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}$$

2. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις :

α)  $\eta\mu 3\chi \sigma\upsilon\nu 3\chi$

β)  $2\eta\mu 4\chi \sigma\upsilon\nu 4\chi$

γ)  $\eta\mu \left( \chi - \frac{\pi}{8} \right) \sigma\upsilon\nu \left( \chi - \frac{\pi}{8} \right)$

δ)  $\eta\mu \left( \frac{\chi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \sigma\upsilon\nu \left( \frac{\chi}{2} - \frac{\pi}{3} \right)$

ε)  $1 - 2\eta\mu^2 \frac{\chi - 3\pi}{2}$

στ)  $\frac{2\varepsilon\varphi \frac{\alpha}{4}}{1 - \varepsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{4}}$

ζ)  $2\sigma\upsilon\nu^2 \left( \frac{3\pi}{4} - \chi \right) - 1$

η)  $\frac{2\varepsilon\varphi 2\chi}{1 - \varepsilon\varphi^2 2\chi}$

θ)  $2\sigma\upsilon\nu^2 \left( \frac{\chi - 2\pi}{2} \right) - 1$

ΣΧΟΛΙΟ :

Από τους παραπάνω τύπους παράγονται οι εξής :

- $\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$

- $\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$

- $\varepsilon\varphi^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$

3. Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \sin^2 10^\circ - \sin^2 80^\circ = \sin 20^\circ$$

$$\beta) \sin^4 \alpha - \eta\mu^4 \alpha = \sin 2\alpha$$

4. Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \frac{\eta\mu 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} = \sigma\phi\alpha$$

$$\beta) \frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \varepsilon\phi\alpha$$

5. Να δείξετε ότι :

$$\alpha) 1 + \varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi 2\alpha = \frac{1}{\sin 2\alpha}$$

$$\beta) \varepsilon\phi(45^\circ - \alpha) = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \eta\mu 2\alpha}$$

6. Ομοίως να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \frac{\sin \alpha + \eta\mu \alpha}{\sin \alpha - \eta\mu \alpha} - \frac{\sin \alpha - \eta\mu \alpha}{\sin \alpha + \eta\mu \alpha} = 2\varepsilon\phi 2\alpha$$

$$\beta) \sigma\phi\alpha - \varepsilon\phi\alpha = 2\sigma\phi 2\alpha$$

7. Να δείξετε ότι :

$$\alpha) \frac{1 - \eta\mu 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1 - \varepsilon\phi\alpha}{1 + \varepsilon\phi\alpha}$$

$$\beta) \frac{\eta\mu 2\alpha + \eta\mu \alpha}{1 + \sin 2\alpha + \sin \alpha} = \varepsilon\phi\alpha$$

8. Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \frac{1 + \sin \alpha}{\eta\mu \alpha} = \sigma\phi \frac{\alpha}{2}$$

$$\beta) \frac{1 + \sin \alpha + \sin \frac{\alpha}{2}}{\eta\mu \alpha + \eta\mu \frac{\alpha}{2}} = \sigma\phi \frac{\alpha}{2}$$

9. Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \frac{\eta\mu 4\alpha}{1 - \sin 4\alpha} \cdot \frac{1 - \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \varepsilon\phi\alpha$$

$$\beta) \frac{\eta\mu 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} \cdot \frac{1 - \sin \alpha}{\sin \alpha} = \varepsilon\phi \frac{\alpha}{2}$$

10. Αν για τις γωνίες  $\alpha, \beta$  ισχύει ότι  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ , να δείξετε ότι :

$$\varepsilon\phi\alpha + \varepsilon\phi\beta = \frac{2}{\eta\mu 2\alpha}$$

11. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $2\alpha$ , όταν :

α)  $\eta\mu\alpha = \frac{4}{5}$  και  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

β)  $\eta\mu\alpha = -\frac{2}{3}$  και  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

12. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $2\alpha$ , όταν :

α)  $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{1}{3}$  και  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

β)  $\epsilon\phi\alpha = \sqrt{3}$

13. Να υπολογίσετε την  $\epsilon\phi(\alpha + 2\beta)$ , όταν :  $\epsilon\phi\alpha = -2$  και  $\epsilon\phi\beta = \frac{1}{3}$ .

14. Ομοίως να υπολογίσετε την  $\epsilon\phi(\alpha - 2\beta)$ , όταν :  $\epsilon\phi\alpha = \frac{1}{2}$  και  $\epsilon\phi\beta = 4$

15. Αν  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  και  $4\sigma\upsilon\nu^2x - 2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x = 4$ , να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $2x$ .

16. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $2x$  όταν  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  και  $5\eta\mu^2x - 16\eta\mu x + 3 = 0$ .

17. Αν είναι  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$  και  $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{3}{7}$ , να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\frac{x}{2}$ .

18. Αν  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  και  $4\sigma\upsilon\nu^2x - 11\sigma\upsilon\nu x - 3 = 0$ , να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\frac{x}{2}$ .

19. Αν είναι  $\sigma\phi x = \frac{3}{4}$  και  $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$  να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

α)  $\sigma\upsilon\nu 2x$

β)  $\eta\mu x$

γ)  $\sigma\upsilon\nu 3x - \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$

20. Αν είναι  $\eta\mu \frac{x}{2} = \frac{1}{4}$  και  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

A =  $\eta\mu 3x$

B =  $\epsilon\phi^2 2x$

21. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις :

α)  $\eta\mu 2x - 2\eta\mu x = 2\sigma\upsilon\nu x - 2$

β)  $\eta\mu 2x - \sqrt{2}\eta\mu x = 0$

γ)  $\eta\mu 2x + \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x = 0$

22. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α)  $\sigma\upsilon\nu 2x + 3\eta\mu x = 2$

β)  $2\sigma\upsilon\nu 2x = 3\sigma\upsilon\nu x - 1$

23. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

α)  $2\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu 2x = 0$

β)  $\sigma\upsilon\nu 4x + \sigma\upsilon\nu 2x = 0$

24. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α)  $\sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu^2 2x = 1$

β)  $2\eta\mu^2 x + \eta\mu^2 2x = 2$

25. Να λυθούν οι εξισώσεις που ακολουθούν :

α)  $1 + \sigma\upsilon\nu 2x - \eta\mu 2x = 0$

β)  $\sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu x = 1$

26. Να λύσετε την εξίσωση :  $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu^3 x - 1 = 0$  .

27. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α)  $\sigma\upsilon\nu 2x + 2 = 2\eta\mu^2 \frac{x}{2}$

β)  $\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2} = 0$

28. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α)  $2\eta\mu^2\frac{x}{2} = 2 + \eta\mu^2x$

β)  $4\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2} - \sigma\upsilon\nu^2x = 2$

γ)  $2\sigma\upsilon\nu x + 3 = 4\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$

δ)  $\sigma\upsilon\nu x + 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2} = 2$

29. Να λύσετε την εξίσωση :  $\eta\mu 2x = \epsilon\phi x$ .

30. Να λυθεί η εξίσωση :  $\epsilon\phi x \cdot \epsilon\phi 2x = 3$  .

31. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α)  $\eta\mu\epsilon\phi\frac{x}{2} = \sigma\upsilon\nu x$

β)  $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 1$

32. α) Να δείξετε ότι :  $\sigma\upsilon\nu 4x = 8\sigma\upsilon\nu^4x - 8\sigma\upsilon\nu^2x + 1$ .

β) Να λυθεί η εξίσωση :  $16\sigma\upsilon\nu^4x - 16\sigma\upsilon\nu^2x + 1 = 0$  .

γ) Να δείξετε ότι το  $\sigma\upsilon\nu 15^\circ$  είναι ρίζα της εξίσωσης :  $8x^4 - 8x^2 + \frac{1}{2} = 0$  .

33. Αν σ'ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει :  $1 - \sigma\upsilon\nu A = \eta\mu\frac{A}{2}$ , να δείξετε ότι :  $B + \Gamma = 120^\circ$  .

34. Αν  $x = \frac{\pi}{6}$ , είναι ρίζα της εξίσωσης :  $\lambda^2 + \sigma\upsilon\nu 2x = 1 + 6\eta\mu^2x$ , να λύσετε την εξίσωση.

35. Να εξετάσετε αν είναι σωστές ή λανθασμένες οι επόμενες προτάσεις. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α)  $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha$

β)  $\eta\mu\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{2}\eta\mu 2\alpha$

γ)  $\epsilon\phi 2\alpha = \frac{2\epsilon\phi\alpha}{1 + \epsilon\phi^2\alpha}$

36. Να εξετάσετε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιές όχι.  
Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α)  $\eta\mu 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}$

β)  $\frac{\eta\mu 2\alpha}{2} = \eta\mu\alpha$

γ)  $\sigma\upsilon\nu\alpha + 1 = 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}$

δ)  $\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} = \frac{\eta\mu\alpha}{2}$

ε)  $1 - \varepsilon\varphi^2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi 2\alpha}$

στ)  $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}$

37. Στην αριστερή στήλη δίνονται τριγωνομετρικές εξισώσεις, ενώ στη δεξιά οι τιμές των γωνιών που τις επιλύουν. Να συνδυάσετε τις εξισώσεις με τις σωστές τους λύσεις.

Εξισώσεις

Λύσεις

•  $\sigma\upsilon\nu^2 2x - \eta\mu^2 2x = 1$

•  $x = (2k \pm 1)\pi, k \in Z$

•  $\eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu x = 2\eta\mu x - 1$

•  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$  ή  $x = k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in Z$

•  $\sigma\upsilon\nu 2x - \sigma\upsilon\nu x = 2$

•  $x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z$

•  $1 + \sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu 2x = 0$

•  $x = 2k\pi$  ή  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$  ή

$x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in Z$

•  $\sqrt{3}\eta\mu 2x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x = \eta\mu^2 x$

•  $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in Z$

•  $x = k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in Z$

38. Αν  $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\beta}{\alpha}$ , η τιμή της παράστασης  $\alpha\sigma\upsilon\nu 2\theta + \beta\eta\mu 2\theta$  είναι :

A :  $\frac{\beta}{\alpha}$

B :  $\beta$

Γ :  $\alpha$

Δ :  $2\beta$

E :  $2\alpha$

39. Αν  $\varepsilon\varphi 2x = 2$  και  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ , τότε η  $\varepsilon\varphi x$  είναι ίση με :

A :  $\frac{1}{2}$                       B : -1                      Γ :  $\sqrt{3}$                       Δ :  $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

E :  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

40. Αν  $\eta\mu\alpha = -\frac{2}{3}$  και  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ , τότε  $\eta\mu 2\alpha$  είναι ίσο με :

A :  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$                       B :  $\frac{2}{3}$                       Γ :  $\frac{2\sqrt{5}}{3}$                       Δ :  $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

E :  $\frac{1}{3}$

41. Αν  $\varepsilon\varphi\alpha = \sqrt{2}$  τότε η  $\varepsilon\varphi 2\alpha$  είναι ίση με :

A :  $-\sqrt{2}$                       B : -1                      Γ :  $2\sqrt{2}$                       Δ :  $-2\sqrt{2}$

E : 1

42. Αν  $3\sigma\upsilon\nu^2 x - 13\sigma\upsilon\nu x + 4 = 0$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , τότε η τιμή του  $\sigma\upsilon\nu 2x$  είναι :

A :  $\frac{1}{3}$                       B :  $-\frac{2}{3}$                       Γ :  $-\frac{4}{9}$                       Δ :  $\frac{5}{9}$

E :  $-\frac{7}{9}$

43. Όταν  $\varepsilon\varphi\alpha = -3$  και  $\varepsilon\varphi\beta = 2$ , τότε η τιμή της  $\varepsilon\varphi(2\alpha - \beta)$  είναι :

A : 1                      B :  $-\frac{1}{3}$                       Γ :  $-\frac{1}{2}$                       Δ : 3

E :  $-\frac{2}{3}$