



Κ Ε Φ Α Λ Λ Α Ι Ο 6ο - Φ Υ Λ Λ Ο Νο 6

ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εξετάσετε ποιές από τις ακόλουθες συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιές περιττές.

α) $f(x) = x^{-3} + x^{-1}$

β) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 11}$

γ) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

δ) $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1}$

ε) $f(x) = \frac{2}{1 - x}$

στ) $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - x}$

ζ) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$

η) $f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$

θ) $f(x) = x|x| + 3$

ι) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{|x| - 2}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $g : (-3, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(x) = x(1 - |x|) + 1.$$

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση g είναι συμμετρική.

3. Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .

Να δείξετε ότι :

Η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ είναι άρτια και

η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ είναι περιττή.

4. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις :

α) $f(x) = 3x + 7$

β) $f(x) = \sqrt{2x - 1}$

γ) $f(x) = \sqrt{2 - x}$

δ) $f(x) = 2 - \sqrt{3 - x}$

ε) $f(x) = \frac{1}{x}$

στ) $f(x) = -\frac{2x^2}{5}$

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΠΡΟΣΟΧΗ :

Μονοτονία :

- Αν $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, τότε η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο Δ .
- Αν $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$, για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, τότε η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο Δ .

Ακρότατα :

- Αν $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$, όπου A το πεδίο ορισμού της f τότε η f παρουσιάζει **μέγιστο** στο $x_0 \in A$ και η τιμή $f(x_0)$ ονομάζεται μέγιστο της f .
- Αν $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$, όπου A το πεδίο ορισμού της f τότε η f παρουσιάζει **ελάχιστο** στο $x_0 \in A$ και η τιμή $f(x_0)$ ονομάζεται ελάχιστο της f .

Συμμετρίες

- **Άρτια** ονομάζεται συνάρτηση f όταν για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$.
Μια συνάρτηση άρτια είναι συμμετρική ως προς τον y' άξονα.
- **Περιττή** ονομάζεται συνάρτηση f όταν για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$.
Μια συνάρτηση περιττή είναι συμμετρική ως προς την αρχή $O(0, 0)$ των αξόνων.

Προσοχή : Σε κάθε περίπτωση A είναι το **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης f , το οποίο πρέπει να υπολογίζουμε αρχικά..

Αν το A δεν έχει **συμμετρία** ως προς την αρχή O των αξόνων τότε η συνάρτηση **δεν** είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

5. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

α) $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$

β) $f(x) = |x| + 1$

γ) $f(x) = |x-2|$

δ) $f(x) = -x + 8$

ε) $f(x) = \frac{3}{4}x^2$

στ) $f(x) = -\frac{3}{8x}$

6. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -2x+1, & x \leq -3 \\ -x+2, & x > -3 \end{cases}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

7. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο $(0, +\infty)$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2x+5} < \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2x+5}$.

(Απ. γ) $x < -2$

8. Οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το \mathbb{R} . Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και η g είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h με $h(x) = f(x) - g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

9. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = \sqrt{5 - \sqrt{\alpha - x}}$ διέρχεται από το σημείο $A(3, 2)$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α .

(Απ. $\alpha = 4$)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Απ. $[-21, 4]$)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία της.

(Απ. η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-21, 4]$)

10. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

α) $f(x) = 2x^2 - 1$

β) $f(x) = -3x^2 + 1$

γ) $f(x) = 3|x| + 2$

δ) $f(x) = 3 - 4|x-2|$

ε) $f(x) = \frac{5}{x^4+2}$

στ) $f(x) = \sqrt{x-1} - 1$

στ) $f(x) = -\frac{6}{2 + \sqrt{3-x}}$

11. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x^3 + 2x$, με πεδίο ορισμού τα επόμενα σύνολα :

- α) $[-1, 2]$ β) $(-3, 1]$ γ) $[-2, 4)$ δ) $[-1, +\infty)$

12. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = -3x + 2$, με πεδίο ορισμού τα επόμενα σύνολα :

- α) $[-2, 3]$ β) $(-1, 2]$ γ) $[-4, 1)$ δ) $(-\infty, 1]$

13. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

- α) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ β) $f(x) = -x^2 + 2x - 3$
γ) $f(x) = x^2 - 6x + 10$ δ) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + 1$

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 - 4x + 5}{4x^2 + 3}$. Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο τη τιμή $\frac{2}{3}$ και μέγιστο τη τιμή 2 .

15. α) Να αποδείξετε ότι : $-\frac{1}{4} \leq \frac{x}{x^2 + 4} \leq \frac{1}{4}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = 3 - \frac{4x}{x^2 + 4}$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στα διαστήματα $[-3, 0]$ και $[0, 3]$.

γ) Να βρείτε τα ακρότατα της f .

17. Δίνονται οι συναρτήσεις $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 1}{x} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x} \quad \text{αντίστοιχα.}$$

α) Να δείξετε ότι $x + \frac{1}{x} \geq 2$, για κάθε $x > 0$ και ότι $x + \frac{1}{x} \leq -2$, για κάθε $x < 0$.

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f και τη μέγιστη της g .

γ) Να δείξετε ότι $f(2012) - g(2013) \geq 10$.