

ΛΥΚΕΙΟ

ΤΡΙΜΗΣ ΠΑΝΤΕΛΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

5ο Φύλλο Ασκήσεων

**ΑΣΚΗΣΗ 1η**

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα των συναρτήσεων :

α) $f(x) = x^2 + 1$

β) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

γ) $f(x) = -2x^2 + 4$

δ) $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$

ε) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

στ) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$

ΑΣΚΗΣΗ 2η

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα των συναρτήσεων :

α) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 + 1}$

β) $f(x) = \frac{4x + 5}{x^2 - 1}$

γ) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$

δ) $f(x) = |x^2 - 1|$

ε) $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$

στ) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}$

ζ) $f(x) = xe^x$

η) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

θ) $f(x) = x \cdot \ln x$

ι) $f(x) = x^{\ln x}$

ΑΣΚΗΣΗ 3η

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 36$$

Να βρείτε :

- την f' ,
- τα διαστήματα στα οποία η f' αλλάζει πρόσημο ,
- τα διαστήματα μονοτονίας της f ,
- τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει ακρότατα.

ΑΣΚΗΣΗ 4η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 5]$.

- Να κάνετε ένα πρόχειρο διάγραμμα (γραφική παράσταση) της συνάρτησης f .
- Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f και να τα χαρακτηρίσετε.

ΑΣΚΗΣΗ 5η

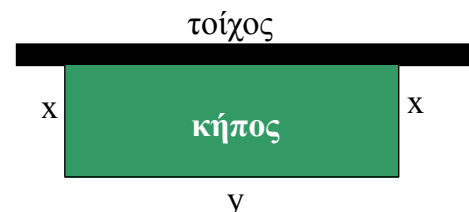
Σε κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις να σημειώσετε **Σ** αν είναι σωστή ή **Λ** αν είναι λανθασμένη. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

- Αν είναι $f'(x_0) = 0$ τότε η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο x_0 .
- Αν $f''(x) > 0$ με $x \in \Delta$, όπου Δ διάστημα του πεδίου ορισμού της f , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ .
- Αν x_0 είναι μια ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$ και γύρω από το x_0 η f' αλλάζει πρόσημο, τότε η f για $x = x_0$ παρουσιάζει ακρότατο.
- Αν $f'(x_0) = 0$ και η f παρουσιάζει στο x_0 ακρότατο τότε είναι οπωσδήποτε και $f(x_0) = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 6η

Θέλουμε να περιφράξουμε έναν κήπο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, του οποίου η μια πλευρά (η μεγαλύτερη) είναι τοίχος (σχήμα 1). Έχουμε αγοράσει 1.600 μέτρα συρμάτινο πλέγμα για περίφραξη. Ποιές διαστάσεις πρέπει να έχει ο κήπος, ώστε να έχει τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια ;

(Απ. $x = 400$ m και $y = 800$ m)

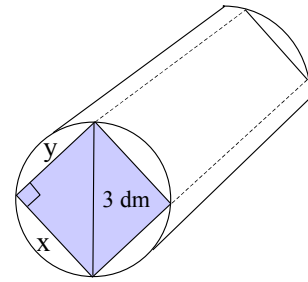


(σχήμα 1)

κάτοψη του κήπου που πρέπει να περιφραχθεί

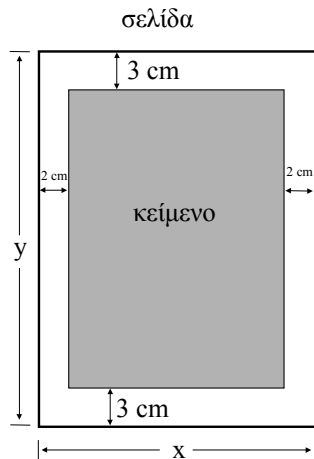
ΑΣΚΗΣΗ 7η

Από ένα μεταλικό κύλινδρο (σχήμα 2) διαμέτρου 3 dm θέλουμε να κατασκευάσουμε μια δοκό με κάθετη τομή ορθογώνιο διαστάσεων x, y dm. Αν η αντοχή της δοκού είναι ανάλογη του εμβαδού $x \cdot y$, να βρείτε τις διαστάσεις της ανθεκτικότερης δοκού που μπορούμε να κατασκευάσουμε.



(σχήμα 2)

(Απ. $x = y \approx 2,11$ dm)



(σχήμα 3)

ΑΣΚΗΣΗ 8η

Θέλουμε να τυπώσουμε σελίδες εμβαδού 384 cm^2 έτσι, ώστε τα περιθώρια του κειμένου να είναι 3 cm πάνω και κάτω και 2 cm δεξιά και αριστερά (σχήμα 3). Ποιές πρέπει να είναι οι διαστάσεις κάθε σελίδας, ώστε το κείμενο να καταλαμβάνει το μέγιστο δυνατό χώρο της σελίδας ;

(Απ. $x = 16 \text{ cm}$ και $y = 24 \text{ cm}$)

ΑΣΚΗΣΗ 9η

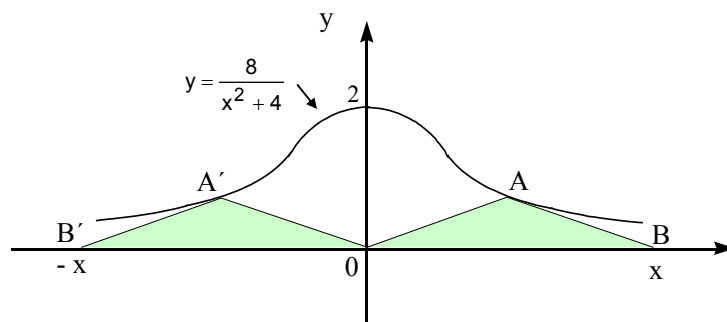
Η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + x$, $a \neq 0$, παρουσιάζει στο σημείο $x = 1$ ακρότατο. Να βρείτε την τιμή του a και στη συνέχεια το είδος του ακρότατου.

(Απ. $a = -\frac{1}{2}$ και παρουσιάζει μέγιστο)

ΑΣΚΗΣΗ 10η

Αν A, A' είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{8}{x^2 + 4},$$



σχήμα 4

να βρείτε τις θέσεις των σημείων B, B' των ισοσκελών τριγώνων OAB και $OA'B'$ του σχήματος 4, για τις οποίες το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων αυτών παίρνει τη μέγιστη τιμή.

(Απ. $x = 4$)

ΑΣΚΗΣΗ 11η

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln \frac{1}{x}$.

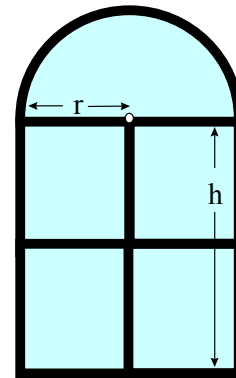
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει μέγιστη τιμή για $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

γ) Να αποδείξετε ότι είναι $\ln x \geq -\frac{1}{2x^2 e}$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f .

ΑΣΚΗΣΗ 12η

Το σχήμα 5 παριστάνει ένα παράθυρο που αποτελείται από ένα ορθογώνιο ύψους h και από ένα ημικύκλιο ακτίνας r . Η περίμετρος του παράθυρου είναι 48 m.



σχήμα 5

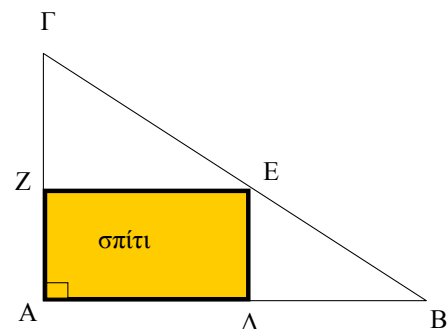
α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του ως συνάρτηση του r .

β) Για ποιές τιμές των r και h διέρχεται από το παράθυρο η μέγιστη δυνατή ποσότητα φωτός ;

(Απ. $r = h = \frac{48}{4 + \pi}$)

ΑΣΚΗΣΗ 13η

Στο σχήμα 6 φαίνεται η κάτοψη ενός σπιτιού σε σχήμα ορθογώνιο, το οποίο έχει κτιστεί στην ορθή γωνία ενός τριγωνικού οικοπέδου με μήκη πλευρών $AG = 100$ m και $AB = 150$ m.



σχήμα 6

(Απ. $x = 75$ m)

α) Αν υποθέσουμε ότι $A\Delta = x$, να εκφράσετε ως συνάρτηση του x το μήκος $E\Delta$.

β) Για ποιά τιμή του x το σπίτι θα έχει το μέγιστο εμβαδόν ;

γ) Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν του σπιτιού.

ΑΣΚΗΣΗ 14η

Ένας μαγνήτης είναι τοποθετημένος σε απόσταση x από το κέντρο κυκλικού πηνίου ακτίνας R . Ηλεκτρικό ρεύμα, που διατρέχει το πηνίο, ασκεί στο μαγνήτη δύναμη :

$$F(x) = c \cdot \frac{x}{(x^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}}, \text{ όπου } c \text{ θετική σταθερά. Να βρείτε για ποιο } x \text{ γίνεται μέγιστη}$$

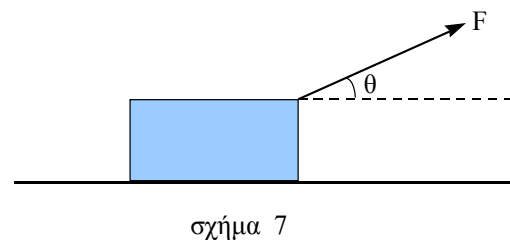
η δύναμη αυτή.

(Απ. $x = R/2$)

ΑΣΚΗΣΗ 15η

Σώμα βάρους B σύρεται σε οριζόντιο επίπεδο από μία δύναμη F που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο (σχήμα 7). Αν το μέτρο της δύναμης είναι :

$$F = \frac{\kappa \cdot B}{\kappa \eta \mu \theta + \sigma \nu \eta \theta}$$

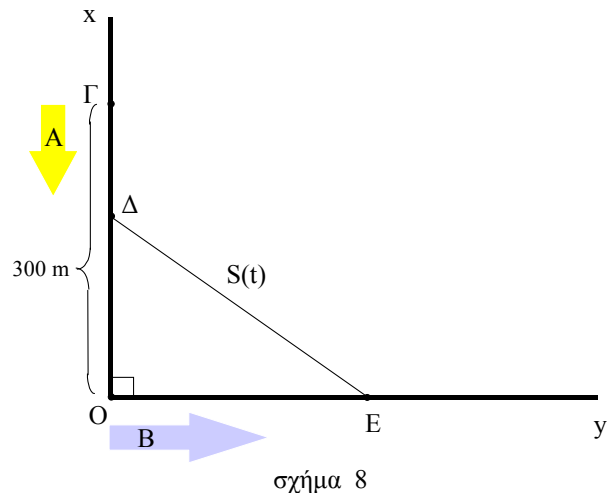


όπου κ ο συντελεστής τριβής, να βρείτε τη γωνία θ , ώστε το μέτρο της δύναμης F να γίνεται ελάχιστο.

(Απ. $\epsilon \phi \theta = \kappa$)

ΑΣΚΗΣΗ 16η

Δύο ευθύγραμμοι δρόμοι Ox και Oy διασταυρώνονται κάθετα στο O (σχήμα 8). Ένα αυτοκίνητο A βρίσκεται στο δρόμο Ox σε απόσταση 300 km από τη διασταύρωση, ενώ ένα άλλο αυτοκίνητο B βρίσκεται στο O . Τα A, B αρχίζουν ταυτόχρονα να κινούνται με ταχύτητες 60 km/h και 80 km/h αντίστοιχα. Το A κινείται προς το σημείο O , ενώ το B απομακρύνεται από το O ακολουθώντας το δρόμο Oy .



α) Ύστερα από πόσο χρόνο η απόσταση $S(t)$ των δύο αυτοκινήτων γίνεται ελάχιστη ;

β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των δύο αυτοκινήτων 2 ώρες αφότου ξεκίνησαν.

(Απ. $t = 9/5 \text{ h}$, $S'(2) = 8,3 \text{ km/h}$)