

ΛΥΚΕΙΟ

ΤΡΙΜΗΣ ΠΑΝΤΕΛΗΣ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο  
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ



6ο Φύλλο Ασκήσεων

Επανάληψης

**ΑΣΚΗΣΗ 1η**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = x^3 - x^2 + ax - 4$ , όπου  $a$  είναι πραγματικός αριθμός.

- α) Να βρεθεί ο αριθμός  $a$  ώστε να ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ . Στην συνέχεια, να βρεθεί το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$ .
- β) Για ποιές τιμές του  $a$  η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ ; Υπάρχει περίπτωση η  $f$  να είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ ;
- γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του  $a$  ώστε η  $f$  να μην έχει κανένα ακρότατο.

(Απ. α)  $a = 4$ ,  $x > 1$  β)  $a \geq \frac{1}{3}$ )**ΑΣΚΗΣΗ 2η**

Έστω η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα σημεία της  $f$ , αν αυτά υπάρχουν.
- γ) Να εξετάσετε ποιός από τους αριθμούς  $\pi^e$ ,  $e^\pi$  είναι ο μεγαλύτερος. (χωρίς τη χρήση υπολογιστή).

(Απ. α)  $x > 0$  β)  $0 < x \leq e$   $f \uparrow$  και  $x \geq e$   $f \downarrow$  ακρότατο  $(e, \frac{1}{e})$  γ)  $e^\pi > \pi^e$ )**ΑΣΚΗΣΗ 3η**

- α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης :

$$f(x) = x \cdot \sin x - \eta \mu x, \quad x \in [0, \pi]$$

β) Να δείξετε ότι  $f(x) < 0$ , για κάθε  $x \in (0, \pi)$ .

γ) Έστω επίσης η συνάρτηση  $g$  με  $g(x) = x \eta \mu x + 2 \sigma \upsilon \nu x$ , με  $x \in (0, \pi)$ .  
Δείξτε ότι η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, \pi)$ .

δ) Αν  $\alpha, \beta \in (0, \pi)$  και  $\alpha < \beta$ , να αποδείξετε ότι :

$$\alpha \eta \mu \alpha - \beta \eta \mu \beta > 2(\sigma \upsilon \nu \beta - \sigma \upsilon \nu \alpha).$$

#### ΑΣΚΗΣΗ 4η

Αν  $C_1, C_2$  είναι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  με  $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x}$   
και  $g$  με  $g(x) = 2x^2 + 6x - \alpha$  αντίστοιχα, να βρείτε την τιμή του  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ώστε η  
εφαπτομένη της  $C_1$  στο σημείο  $M(1, f(1))$  να εφάπτεται και στη  $C_2$ .

(Απ.  $\alpha = -1$ )

#### ΑΣΚΗΣΗ 5η

Για τις συναρτήσεις  $f$  με  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  και  $g$  με  $g(x) = \ln(1 + \sqrt{x^2 + 1})$ , να  
αποδείξετε ότι :

α) ορίζονται σε όλο το  $\mathbb{R}$ ,

β) Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και η  $g$  έχει ελάχιστη τιμή το  $\ln 2$ .

γ) για κάθε  $x > 0$  ισχύει ότι :

$$x \cdot e^{f(x)} \cdot \left( g\left(\frac{1}{x}\right) \right)' + f'(x) = 0.$$

#### ΑΣΚΗΣΗ 6η

Σε ένα πείραμα τύχης η πιθανότητα επιτυχίας είναι  $p$  και της αποτυχίας είναι  $1 - p$ .  
Από τη θεωρία των πιθανοτήτων είναι γνωστό ότι η πιθανότητα να έχουμε  $k$   
επιτυχίες σε  $v$  επαναλήψεις του πειράματος δίνεται από τη συνάρτηση  $f$  με

$$f(p) = \delta \cdot p^k (1 - p)^{v-k}, \quad 0 < k < v, \quad 0 < p < 1$$

Να βρείτε την τιμή του  $p$ , ώστε η πιθανότητα αυτή να είναι μέγιστη.

(Απ.  $p = \frac{k}{v}$ )