ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ ΜΗΛΟΥ
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

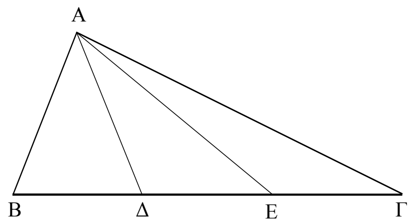
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

3ο ΦΥΛΛΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ (§ 9.5)
ΚΕΦΑΛΑΙΟ : 9
ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΤΥΧΑΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ
(Θεωρήματα Διαμέσων)

ΘΕΜΑ 1ο

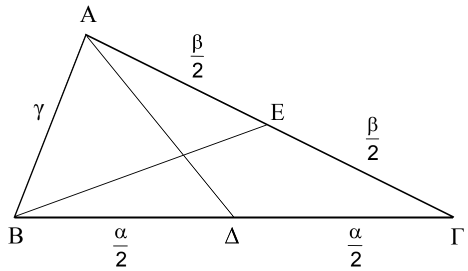
Στην πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε, έτσι ώστε ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ.
Να αποδείξετε ότι :

$$AB^2 + 2A\Gamma^2 = 3AE^2 + 6\Delta E^2$$



ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$ και την διάμεσο ΒΕ.



α) Να αποδείξετε ότι : $BE^2 + \frac{3}{4}A\Gamma^2 = B\Gamma^2$.

β) Αν ΑΔ είναι επίσης διάμεσος του ΑΒΓ ,

με $BE = \sqrt{14}$ και $A\hat{\Delta}B = 60^o$, να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του ΑΒΓ.

ΘΕΜΑ 3ο

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) στο οποίο είναι $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$.
Να αποδείξετε ότι :

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\beta\gamma.$$

ΘΕΜΑ 4ο

Να σημειώσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισοδυναμία $\alpha = \beta \Leftrightarrow \mu_\alpha = \mu_\beta$.

β) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\beta > \gamma$, τότε ισχύει και $\mu_\beta > \mu_\gamma$.

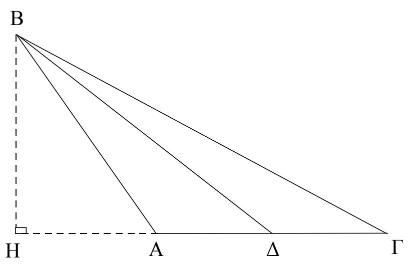
γ) Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με μήκος πλευράς α και διάμεσο ΑΜ ισχύει :

$$AM^2 = \frac{3}{4}\alpha^2$$

δ) Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ > ΑΒ, τη διχοτόμο του ΑΔ και τη διάμεσό του ΑΜ. Τότε αληθεύει η ισότητα :

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha M\Delta.$$

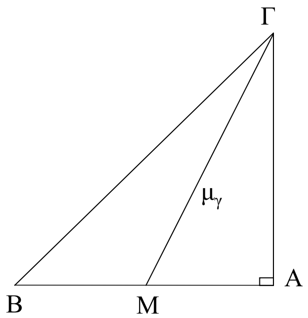
ΘΕΜΑ 5ο



α) Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ να εφαρμόσετε τα θεωρήματα των διαμέσων για την διάμεσο ΒΔ :

$AB^2 + B\Gamma^2 =$ …………………. ,

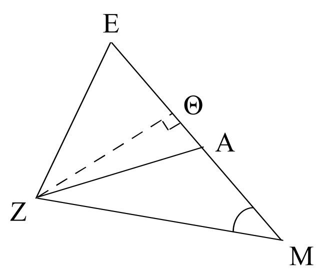
$B\Gamma^2 - AB^2 =$ ……………………



β) Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ με ΓΜ διάμεσο, να εφαρμόσετε τα θεωρήματα διαμέσων :

$B\Gamma^2 + A\Gamma^2 =$ ………………….. ,

$B\Gamma^2 - A\Gamma^2 =$ …………………..

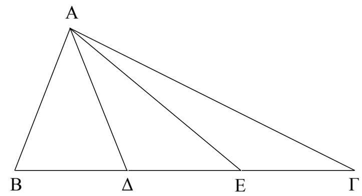


γ) Στο διπλανό τρίγωνο ΕΖΜ με διάμεσο τη ΖΑ και ύψος τη ΖΘ, να εφαρμόσετε τα θεωρήματα διαμέσων :

$ZM^2 + ZE^2 =$ …………………..,

$ZM^2 - ZE^2 =$ ……………………

ΘΕΜΑ 1ο



Στο τρίγωνο ΑΒΕ εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ι Διαμέσων με διάμεσο ΑΔ :

$$ΑΒ^2 + ΑΕ^2 = 2ΑΔ^2 + \frac{ΒΕ^2}{2} \quad (1)$$

Επίσης στο τρίγωνο ΑΔΓ εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ι Διαμέσων με διάμεσο ΑΕ : $ΑΔ^2 + ΑΓ^2 = 2ΑΕ^2 + \frac{ΔΓ^2}{2} \quad (2)$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε :

$$ΑΒ^2 + ΑΕ^2 + ΑΔ^2 + ΑΓ^2 = 2ΑΔ^2 + \frac{ΒΕ^2}{2} + 2ΑΕ^2 + \frac{ΔΓ^2}{2}$$

$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΑΕ^2 + \frac{(2ΔΕ)^2}{2} + \frac{(2ΔΕ)^2}{2}$, αφού ΒΕ = ΔΓ = 2ΔΕ ,

$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΑΕ^2 + 4ΔΕ^2$, προσθέτουμε και στα δύο μέλη $ΑΓ^2$

$$ΑΒ^2 + 2ΑΓ^2 = ΑΓ^2 + ΑΔ^2 + ΑΕ^2 + 4ΔΕ^2 \quad (3)$$

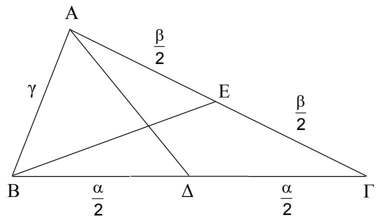
Από εφαρμογή του Θεωρήματος Ι διαμέσων στο τρίγωνο ΑΔΓ : $ΑΔ^2 + ΑΓ^2 = 2ΑΕ^2 + \frac{ΑΓ^2}{2} \quad (4)$

Έτσι αντικαθιστώντας την (4) στην (3) έχουμε : $ΑΒ^2 + 2ΑΓ^2 = 2ΑΕ^2 + \frac{ΑΓ^2}{2} + ΑΕ^2 + 4ΔΕ^2$

$$ΑΒ^2 + 2ΑΓ^2 = 3ΑΕ^2 + \frac{(2ΔΕ)^2}{2} + 4ΔΕ^2$$

$$\mathbf{ΑΒ^2 + 2ΑΓ^2 = 3ΑΕ^2 + 6ΔΕ^2}$$

ΘΕΜΑ 2ο



α) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ι Διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο τη ΒΕ : $ΒΓ^2 + ΑΒ^2 = 2ΒΕ^2 + \frac{ΑΓ^2}{2}$

$ΒΓ^2 = 2ΒΕ^2 - ΑΒ^2 + \frac{ΑΓ^2}{2}$ δηλ. $ΒΓ^2 = ΒΕ^2 + ΒΕ^2 - ΑΒ^2 + \frac{ΑΓ^2}{2}$

$ΒΓ^2 = ΒΕ^2 + ΑΕ^2 + \frac{ΑΓ^2}{2}$, αφού $ΒΕ^2 - ΑΒ^2 = ΑΕ^2$ από Πυθ. Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΕ , έτσι :

$ΒΓ^2 = ΒΕ^2 + \left(\frac{ΑΓ}{2}\right)^2 + \frac{ΑΓ^2}{2}$ δηλ. $ΒΓ^2 = ΒΕ^2 + \frac{ΑΓ^2}{4} + \frac{ΑΓ^2}{2}$ δηλ. $\mathbf{ΒΓ^2 = ΒΕ^2 + \frac{3ΑΓ^2}{4}}$ **.**

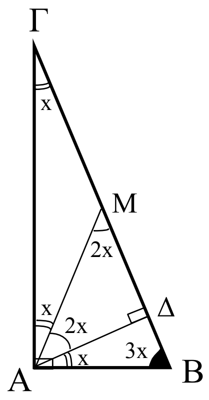
β) Αν θεωρήσουμε την $\hat{ΑΔΒ} = 60^0$ τότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο και $ΑΒ = ΒΔ = \frac{ΒΓ}{2}$ (1) , επίσης από (α) ερώτημα και αντικαθιστώντας $ΒΕ = \sqrt{14}$ έχουμε : $ΒΓ^2 = \frac{3}{4}ΑΓ^2 + 14$ (2) και επειδή ισχύει το Πυθ. Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι : $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$ δηλ. $\frac{3}{4}ΑΓ^2 + 14 = \left(\frac{ΒΓ}{2}\right)^2 + ΑΓ^2$ δηλ.

$$\frac{3}{4}ΑΓ^2 + 14 = \frac{1}{4}ΒΓ^2 + ΑΓ^2 \text{ δηλ. } \frac{3}{4}ΑΓ^2 + 14 = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}ΑΓ^2 + 14\right) + ΑΓ^2$$

$$\frac{3}{4}ΑΓ^2 + 14 = \frac{14}{4} + \frac{3}{16}ΑΓ^2 + ΑΓ^2 \text{ δηλ. } \mathbf{ΑΓ} = \sqrt{24}\,.$$

Στη σχέση (2) $ΒΓ^2 = \frac{3}{4}24 + 14 = 18 + 14 = 32$ δηλ. $\mathbf{ΒΓ} = \sqrt{32}$ και έτσι $\mathbf{ΑΒ} = \frac{\sqrt{32}}{2} = \sqrt{\frac{32}{4}} = \sqrt{8}$.

ΘΕΜΑ 3ο



Αν ονομάσουμε τη γωνία $\hat{\Gamma} = x$ τότε $\hat{B} = 3x$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 3x + x = 4x = 90^0$.

Επίσης ΑΜΓ είναι ισοσκελές (ΑΜ = ΜΓ) και $M\hat{A}\Gamma = \hat{\Gamma} = x$ και έτσι $A\hat{M}\Delta = 2x$, ως εξωτερική του ΑΜΓ τριγώνου και επειδή ΑΔ = υ_α τότε και $M\hat{A}\Delta = 2x$ ώστε

$A\hat{M}\Delta + M\hat{A}\Delta = 90^0$ αφού το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ορθογώνιο.
Άρα ΑΔΜ είναι ισοσκελές και ΜΔ = ΑΔ = υ_α (1).

Από Θεώρημα ΙΙ διαμέσων στο ΑΒΓ τρίγωνο με ΑΜ διάμεσο είναι :

$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha M\Delta$ δηλ. $\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha\upsilon_\alpha$ αλλά $\alpha\upsilon_\alpha = \beta\gamma$ από ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΓ έτσι $\boldsymbol{\beta^2 - \gamma^2 = 2\beta\gamma}$.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Είναι **σωστή** η ισοδυναμία γιατί : $\boldsymbol{\mu_\alpha = \mu_\beta} \Leftrightarrow \mu_\alpha^2 = \mu_\beta^2 \Leftrightarrow \dfrac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} = \dfrac{2\gamma^2 + 2\alpha^2 - \beta^2}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2 = 2\gamma^2 + 2\alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\beta^2 = 3\alpha^2 \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta = \alpha}$$

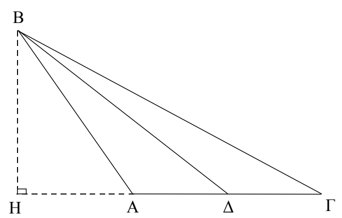
β) Είναι **λάθος** γιατί αν $\boldsymbol{\mu_\beta > \mu_\gamma}$ τότε $\mu_\beta^2 > \mu_\gamma^2$ δηλ. $\dfrac{2\gamma^2 + 2\alpha^2 - \beta^2}{4} > \dfrac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}$ δηλ.
$2\gamma^2 + 2\alpha^2 - \beta^2 > 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2$ δηλ. $3\gamma^2 > 3\beta^2$ δηλ. $\gamma^2 > \beta^2$ έτσι $\boldsymbol{\gamma > \beta}$ που είναι άτοπο.

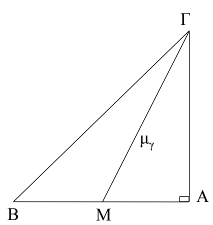
γ) Είναι **σωστή** αφού η διάμεσος μ_α είναι $\mu_\alpha^2 = \dfrac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} = \dfrac{2\alpha^2 + 2\alpha^2 - \alpha^2}{4} = \dfrac{3\alpha^2}{4}$.

δ) Είναι **λάθος** γιατί η ΑΔ είναι διχοτόμος και η ΜΔ δεν θα είναι προβολή της διαμέσου ΑΜ όπως απαιτεί το Θεώρημα ΙΙ των Διαμέσων.

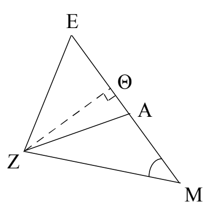
ΘΕΜΑ 5ο

α) $AB^2 + B\Gamma^2 = 2\,B\Delta^2 + \dfrac{A\Gamma^2}{2}$,
$B\Gamma^2 - AB^2 = 2.A\Gamma.H\Delta$





β) $B\Gamma^2 + A\Gamma^2 = 2\,M\Gamma^2 + \dfrac{AB^2}{2}$
$B\Gamma^2 - A\Gamma^2 = 2.BA.MA$



γ) $ZM^2 + ZE^2 = 2\,ZA^2 + \dfrac{EM^2}{2}$
$ZM^2 - ZE^2 = 2.ME.\Theta A$