



Κ Ε Φ Α Λ Λ Α Ι Ο 2ο - Φ Υ Λ Λ Ο Νο 3

ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν $\alpha < \beta < \gamma$ να γραφτεί χωρίς απόλυτες τιμές η παράσταση :

$$A = 2|\alpha - \beta| + 3|\gamma - \alpha| - |\beta - \gamma|$$

2. Αν $\alpha > \beta > \gamma$ να απλοποιήσετε την παράσταση :

$$A = |\alpha - \beta| + |\beta - \gamma| + 2|\gamma - \alpha|$$

3. Αν $\frac{1}{2} < x < 2$ να απλοποιήσετε την παράσταση :

$$A = |2x - 1| + |x - 2|.$$

4. Να γράψετε τις επόμενες παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές :

$$A = x \cdot |x|$$

$$B = x - |x + 1|$$

$$\Delta = |x + 2| - 4$$

$$E = |x| + 2x - 1$$

ΠΡΟΣΟΧΗ :

Ορισμός απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού :

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

Άμεσες συνέπειες ορισμού :

- $|\alpha| \geq 0$, για κάθε πραγματικό α
- $|\alpha| = |- \alpha|$
- $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$
- $|\alpha|^2 = \alpha^2$
- $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ η' $x = -\theta$
(ισχύει μόνο για $\theta > 0$)
- $|x| = |\theta| \Leftrightarrow x = \theta$ η' $x = -\theta$
(ισχύει για κάθε θ πραγματικό)
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\Gamma = |x| \cdot x - x$$

$$\Sigma\text{T} = |2x - 1| + 3x - 1$$

5. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$A = |2 - x| + |x|$$

$$B = |3 - x| + |x - 1|$$

$$\Gamma = |2x - 1| - |x + 2|,$$

6. Αν $1 < x < 3$, να απλοποιήσετε την παράσταση $A = 4x - |2x - |x - 3||$

7. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν την σχέση :

$$|x - 1| + |2x + y - 2| + |z - 3| = 0$$

8. Αν $|x+3| + |x+y-1| = 0$, να υπολογίσετε το γινόμενο $\Gamma = x \cdot y$.
9. Αν $x^3 < x < |x|$, να υπολογίσετε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός x .

10. Να αποδείξετε ότι : $|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2$

11. Αν $|x| \leq 1$ και $|y| \leq 2$, να αποδείξετε ότι :

α) $|2x - 3y| \leq 8$ β) $|3x - y + 1| \leq 6$

12. Αν $|x| \leq 1$, να αποδείξετε ότι : $|2x^2 - 7x| \leq 9$.

13. Να αποδείξετε ότι για $xy \neq 0$ ισχύει : $\left| \frac{x}{y} \right| + \left| \frac{y}{x} \right| \geq 2$

14. Να αποδείξετε ότι αν

$|3\alpha - 2\beta| \leq x$, $|3\beta - 2\gamma| \leq y$, $|3\gamma - 2\alpha| \leq z$, τότε :

$|\alpha + \beta + \gamma| \leq x + y + z$, όπου $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

15. Να αποδείξετε ότι : $|\alpha\beta| + \alpha\beta \geq |\alpha| \cdot \beta + \alpha \cdot |\beta|$.

16. Να αποδείξετε ότι : $|\alpha + 2\beta| < |2\alpha + \beta| \Leftrightarrow |\beta| < |\alpha|$.

17. Αν $\alpha \neq 0$, να δείξετε ότι : $\left| \alpha + \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2$.

18. Όταν $|x| = 2$, τότε είναι :

α) $x = 2$ β) $x = -2$ γ) $x = 2$ ή $x = -2$.

Να επιλέξετε μια από τις παραπάνω απαντήσεις την οποία να αιτιολογήσετε.

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΙΜΩΝ

ΠΡΟΣΟΧΗ :

Για δύο πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει :

- $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
- $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$, $\beta \neq 0$
- $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

(η ισότητα της τελευταίας σχέσης ισχύει όταν οι α, β , είναι ομόσημοι)

Βασικές ανισότητες με απόλυτα : ($x_0 \in \mathbb{R}$)

- $|x - x_0| \leq \rho \Leftrightarrow -\rho \leq x - x_0 \leq \rho \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x_0 - \rho \leq x \leq x_0 + \rho \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \in [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ (1)
- $|x - x_0| \geq \rho \Leftrightarrow x - x_0 \geq \rho \text{ ή } x - x_0 \leq -\rho \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \geq x_0 + \rho \text{ ή } x \leq x_0 - \rho \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho] \cup [x_0 + \rho, +\infty)$ (2)

ΠΡΟΣΟΧΗ : Οι προτάσεις (1), (2) ισχύουν **μόνο** όταν $\rho \geq 0$.

Αν $\rho < 0$ η (1) είναι **αδύνατη**.

Αν $\rho < 0$ η (2) είναι **ταυτότητα** δηλ. έχει άπειρες λύσεις.

19. Αν $|x| \leq 0$, τότε :

α) $x = 0$

β) $x \geq 0$

γ) $x < 0$.

Να επιλέξετε μια από τις παραπάνω απαντήσεις την οποία να αιτιολογήσετε.

20. Αν $2 < \alpha < 7$ και $|\alpha - 2| + |7 - \alpha| + 5x = 25$, να υπολογίσετε την τιμή του x .

21. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ;

α) $|-x| = |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) $|-x| = x$, για κάθε x πραγματικό αριθμό.

γ) $|-x| = -|x|$, για κάθε πραγματικό αριθμό.

δ) $|x| \geq 0$, για κάθε x πραγματικό αριθμό.

ε) $|x| > 0$, τότε $x \neq 0$.

στ) $-|x| \leq x \leq |x|$, μόνο όταν $x = 0$.

22. Να βρείτε το διάστημα ή τα διαστήματα στα οποία ανήκουν τα x για τα οποία ισχύει :

α) $|x| \leq 3$

β) $|x - 2| < 3$

γ) $|x + 1| > 2$

δ) $|2x - 1| \leq 3$

ε) $2 \leq |x| \leq 4$

στ) $|x - 1| \geq 4$

ζ) $2 \leq |x - 5| \leq 4$

23. Αν ισχύει ότι $d(2\alpha, 9\beta) = d(\alpha, 0)$, να δείξετε ότι $\alpha = 9\beta$ ή $\alpha = 3\beta$.

24. Αν $\alpha < 1 < \beta$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $\Pi = d(1, \alpha) + d(1, \beta) - d(\alpha, \beta)$

25. Να αποδείξετε ότι : $d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, 3) + d(3, \beta)$.

26. Δίνεται η παράσταση : $A = 2 - \frac{|1-x|}{x^2 - 2x + 1}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση A (δηλ. να γραφεί η A χωρίς απόλυτες τιμές).