ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : **Π . Δ . ΤΡΙΜΗΣ**
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ
Α΄ Λυκείου

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 2ο - Φ Υ Λ Λ Ο Νο 4

ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εξετάσετε αν είναι σωστό ή όχι ότι :

α) $\alpha^2 + \beta^2 \geq 0$

β) Αν α, β είναι θετικοί, τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^2 > \beta^2$

γ) Αν $\beta\delta \neq 0$, τότε $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta > \gamma\beta$

δ) Αν $\beta \neq 0$, τότε $\frac{\alpha}{\beta} > 1 \Leftrightarrow \alpha > \beta$

ε) Αν $\alpha^2 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

στ) Αν $x \geq 0$ και $y > 0$ τότε $x + y > 0$

ζ) Αν $x \geq y$ και $\alpha > \beta$ τότε $x + \alpha > y + \beta$

η) Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha - \gamma > \beta - \delta$

θ) Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\delta}$, $\beta\delta \neq 0$

ι) Είναι $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ή′ $\beta \neq 0$

ια) Αν $\beta \neq 0$, τότε $\frac{\alpha}{\beta} > 0 \Leftrightarrow \alpha\beta > 0$.

ΠΡΟΣΟΧΗ :

Ισχύει ότι : $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$.

Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, τότε $\alpha + \beta > 0$

Αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$, τότε $\alpha + \beta < 0$

Αν α, β ομόσημοι τότε $\alpha\beta > 0$, $\frac{\alpha}{\beta} > 0$

Αν α, β ετερόσημοι τότε $\alpha\beta < 0$, $\frac{\alpha}{\beta} < 0$

Για κάθε αριθμό α ισχύει $\alpha^2 \geq 0$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ :

- Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$
- Αν $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
- Αν $\gamma > 0$, τότε : $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$
- Αν $\gamma < 0$, τότε : $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$
- Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$
- Για **θετικούς** αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει

  αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$
- Για **θετικούς** αριθμούς α, β και $\nu \in IN^*$

  $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$
  $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$

2. Να αποδείξετε ότι :

α) $\alpha^2 + 2\alpha + 2 > 0$

β) $3 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha - 2\beta - 2\gamma \geq 0$

γ) $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \geq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2$

δ) $\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta}\right)\left(\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y}\right) \geq 4$, $\alpha\beta xy > 0$

3. Αν $α > -1$, δείξτε ότι : $α^3 + α^2 + 2α + 2 > 0$

4. Αν $α < 2$, δείξτε ότι : $α^3 - 2α^2 + 3α - 6 < 0$

5. Να δείξετε ότι :

   α) αν $α > 0$, τότε $α + \frac{1}{α} \geq 2$

   β) αν α, β είναι θετικοί αριθμοί και $αβ = 1$, τότε $(1 + α)(1 + β) \geq 4$.

6. Έστω $α > 1$.

   α) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς 1, α, $\frac{1}{α}$.

   β) Να δείξετε ότι πάνω στον άξονα ο αριθμός $\frac{1}{α}$ βρίσκεται πλησιέστερα στο 1 από ότι ο α.

7. Αν ένας τουλάχιστον από τους α, β είναι διαφορετικός από το μηδέν να δείξετε ότι :

   α) $α^2 + αβ + β^2 > 0$ β) $α^2 - αβ + β^2 > 0$

8. α) Αν $αβ < 0$, να δείξετε ότι : $\frac{α}{β} + \frac{β}{α} \leq -2$

   β) Αν $x < 1$ να λύσετε την ανίσωση : $x - 1 + \frac{1}{x-1} \geq -2$.

9. Αν $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}$ και $\frac{2}{3} < y < \frac{5}{6}$, να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $Α = 8x - 12y + 3$.

10. α) Αν $x \neq 3$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $α = x^2 + 4$ και $β = 6x - 5$.

    β) Αν $α < β$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $α^3 - β$ και $α^2 β - α$.