ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

# ΑΛΓΕΒΡΑ
## Α΄ Λυκείου

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 3ο - Φ Υ Λ Λ Ο Νο 2

**ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ , $\alpha \neq 0$**

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τίς παρακάτω εξισώσεις :

α) $x^2 - 3x + 2 = 0$ β) $x^2 - 6x + 9 = 0$

γ) $x^2 + x + 1 = 0$ δ) $x^2 - x - 5 = 0$

ε) $3x^2 = 0$ στ) $x^2 + 1 = 0$

ζ) $x^2 - 10x + 25 = 0$ η) $4x^2 - 25 = 0$

2. Να λύσετε τίς παρακάτω εξισώσεις :

α) $(x + 5)^2 = 8x + 25$

β) $x(x + 3) = 3x + 2$

γ) $3x(x - 1) = x^2 - 5$

δ) $6x^2 - 13x = - 6$

ε) $(x + 2)^2 = 16$

στ) $(x + 3)(x - 2) + (x + 2)^2 - 3x - 10 = 0$

ζ) $x(12 - x) = 3(4x - 3)$

ΠΡΟΣΟΧΗ :

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ :

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \ , \ \alpha \neq 0. \ (1)$$

Υπολογίζουμε την **διακρίνουσα** :

$$\boldsymbol{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma}.$$

Αν :

- $\Delta > 0$ , τότε η (1) έχει **δύο** πραγματικές και άνισες ρίζες (λύσεις ) :

$$x_1 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

- $\Delta = 0$ , τότε η (1) έχει **μία** ρίζα (λύση) διπλή και πραγματική :

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

(Η ρίζα λέγεται διπλή γιατί αν στις λύσεις $x_1$ , $x_2$ της περίπτωσης που $\Delta > 0$ , θέσουμε όπου $\Delta = 0$ , τότε έχουμε $x_1 = x_2 = x$)

- $\Delta < 0$ , τότε η (1) **δεν** έχει πραγματικές ρίζες και είναι **αδύνατη**.

3. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις :

α) $x^2 - \left(1 + \sqrt{3}\right)x + \sqrt{3} = 0$ β) $y^2 - \sqrt{2}\,y + \sqrt{3} = 0$ γ) $16x^2 - 8\sqrt{2}\,x + 1 = 0$

δ) $\sqrt{3}\,x^2 - 8\sqrt{2}\,x + 4\sqrt{3} = 0$ ε) $\sqrt{2}\,x^2 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)x + \sqrt{5} = 0$

4. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

α) $\frac{5x^2+9}{6} - \frac{4x^2-9}{5} = 3$ β) $\frac{x(x-7)}{3} + \frac{x-4}{3} - \frac{11x}{10} = 1$

γ) $\left(2y+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(3y-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{19}{16}$ δ) $\frac{x(2x-3)}{2} + \frac{(3x-1)^2}{5} - \frac{(x+3)^2}{5} = 1$

5. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

α) $x^2 - 9λx + 14λ^2 = 0$ , $λ \in IR$ β) $x^2 - 5λx + 6λ^2 = 0$ , $λ \in IR$

γ) $x^2 - λ^2 = 0$ , $λ \in IR$ δ) $λ^2x^2 - 4 = 0$ , $λ \in IR$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις που ακολουθούν :

α) $15x^2 - 2αx = α^2$ , $α \in IR$ β) $x^2 - (2α - β)x - 2αβ = 0$ , $α, β \in IR$

γ) $x^2 – 4βx + 4β^2 = α^2$ , $α, β \in IR$ δ) $x^2 + α^2 - β^2 = 2αx$ , $α, β \in IR$

ε) $x^2 + α^2(1 - 2x) = β^2(2x + 1)$ , $α, β \in IR$ στ) $x^2 + (β - 2α)x = 2β^2 + αβ - α^2$

7. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις : ($λ, α, β \in IR$)

α) $(λ - 1)x^2 + 2(2λ + 1)x + 4λ + 3 = 0$ β) $λx^2 - (λ + 1)x + 1 = 0$

γ) $(α^2 - β^2)x^2 - 2α^2βx + α^2β^2 = 0$ , $|α| \neq |β|$

δ) $(α^2 - β^2)x^2 - 2(α^2 + β^2)x + α^2 - β^2 = 0$ , $α \neq \pm β$

ε) $(x - α)^2 + (x - β)^2 - 2(x - α)(x - β) = 0$ στ) $(x - α)(x + α) = βx - α^2$

ζ) $(x - α)(x - β) - (α - x)(x - β) = 0$ η) $(x + α)(x - β) + αβ = 2x^2 - αβ$

8. Να προσδιορίσετε τον $λ \in IR$, ώστε να είναι δεύτερου βαθμού οι εξισώσεις :

α) $(λ^2 - 4)x^2 + 3x - λ^2 = 0$ β) $(λ^2 + λ - 5)x^2 - x + λ = 0$

γ) $3λx^2 + (3λ - κ)x - κ = 0$ δ) $4α^2x^2 + 4αx + β^2 + 1 = 0$

ε) $2λx^2 + (5λ + 2)x + 4λ + 1 = 0$ στ) $(2λ + 1)x^2 + 3(λ - 1)x - λ + 1 = 0$

9. Να υπολογίσετε τις τιμές του $λ \in IR$ ώστε η εξίσωση $x^2 - 2λx + λ^2 = 0$ να έχει ρίζα τον αριθμό 2.

10. Να προσδιορίσετε το $\lambda \in IR$, ώστε η εξίσωση $x^2 + \lambda x = 6\lambda^2$ να έχει ρίζα το 1. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε την άλλη ρίζα της εξίσωσης.

11. Να προσδιορίσετε το $\lambda \in IR$, ώστε η εξίσωση $x^2 - 4x + \lambda = 0$ :

    α) να έχει ρίζες ίσες , β) να μην έχει ρίζες πραγματικές.

12. Να προσδιορίσετε το $\lambda \in IR$, ώστε η εξίσωση $x^2 + x - 1 + 3\lambda = 0$ να έχει :

    α) δύο πραγματικές και άνισες ρίζες ,

    β) μια ρίζα διπλή ,

    γ) καμμία ρίζα πραγματική.

13. Για ποιές τιμές του $\lambda \in IR$, η εξίσωση $\lambda x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda - 3 = 0$ έχει :

    α) ρίζες πραγματικές και άνισες

    β) μια διπλή ρίζα

    γ) καμμιά πραγματική ρίζα.

14. Για ποιές τιμές του $\lambda \in IR$, η εξίσωση $\lambda x^2 - (\lambda - 3)x + \lambda + 5 = 0$, $\lambda \neq 0$, έχει διπλή ρίζα. Να βρείτε τη ρίζα αυτή.

15. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (3k - 42)k + 3\lambda - 15 = 0$. Να υπολογίσετε τα $k, \lambda \in IR$, ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα τον αριθμό 0.

16. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - \lambda x - 5 = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες και άνισες.

17. Αν η εξίσωση $3\alpha x^2 - (2\alpha + 3\beta)x + 2\beta = 0$ , $\alpha\beta \neq 0$ , έχει διπλή ρίζα , δείξτε ότι :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{2}$$

18. Αν η εξίσωση $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\alpha^2 - 4\beta)x^2 - \beta x - 9 = 0$ :

    α) είναι δευτέρου βαθμού β) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες

19. Αν $x_1 = 3$ είναι μια από τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 + (λ + 1)x + λ^2 = 16$ , να προσδιορισθεί η άλλη.

20. Αν η εξίσωση $x^2 + 2(κ + 1)x + 2κ + λ + 1 = 0$ δεν έχει ρίζες πραγματικές, να αποδείξετε ότι το ίδιο συμβαίνει και για την εξίσωση $x^2 - 2κx + λ = 0$.

21. Να βρείτε τις τιμές του $λ \in IR$, για τις οποίες η εξίσωση $(λ - 1)x^2 + 2(λ - 2)x + λ = 0$ είναι αδύνατη.

22. Δείξτε ότι η εξίσωση $(x - α)^2 + (x - β)^2 = (α - β)^2$ (1) έχει για κάθε $α, β \in IR$ πραγματικές ρίζες. Στη συνέχεια αν $α = β = ρ$, δείξτε ότι η (1) έχει διπλή ρίζα τον αριθμό $ρ$.

23. Να αποδείξετε ότι για τις τιμές της συνάρτησης $y = \dfrac{2x^2 + 1}{x - 2}$ ισχύει $y^2 - 8(2y + 1) \geq 0$.

24. Να δείξετε ότι η εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$ , με $α \neq 0$ , δεν μπορεί να έχει περισσότερες από δύο λύσεις.

25. Έστω τρίγωνο με πλευρές 3 cm, 6 cm, και 8 cm. Κατά πόσα cm πρέπει να αυξηθούν οι τρεις πλευρές του, ώστε να γίνει ορθογώνιο ;

26. Να βρεθεί το πλήθος των ευθειών οι οποίες δεν διέρχονται ανά τρεις από το ίδιο σημείο και τέμνονται ανά δύο σε 78 σημεία.

27. Η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι 34 cm. Να βρείτε τα μήκη των κάθετων πλευρών του όταν η μία απ'αυτές είναι μεγαλύτερη από την άλλη κατά 14 cm.