

ΑΛΓΕΒΡΑ

Α΄ Λυκείου

Κ Ε Φ Α Λ Λ Α Ι Ο 4ο - Φ Υ Λ Λ Ο Νο 2

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΑΙ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΡΙΖΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ρίζες, να υπολογίσετε, χωρίς να τις λύσετε το άθροισμα S και το γινόμενό τους P .

α) $-x^2 - 5x + 4 = 0$

β) $\lambda x^2 - x + \lambda^2 = 0$, $\lambda \neq 0$

γ) $\sqrt{5}x^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{3} = 0$

δ) $(\alpha + \beta)x^2 - (\alpha^2 - \beta^2)x + \alpha^3 + \beta^3 = 0$, $\alpha + \beta \neq 0$

ε) $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \mu^2 = 0$

στ) $x^2 - 7\lambda x + 12\lambda^2 = 0$

2. Να σχηματισθεί η εξίσωση 2ου βαθμού η οποία να έχει ρίζες τους αριθμούς :

α) 5, -3 β) $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$

γ) $\sqrt{3} + 1$, $\sqrt{3} - 1$

δ) $\frac{\lambda - 2}{\lambda}$, $\frac{\lambda}{\lambda + 2}$, $\lambda \neq \{-2, 0\}$

3. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης : $x^2 + x - 10 = 0$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

α) $x_1^2 + x_2^2$

β) $x_1^3 + x_2^3$

γ) $(x_1 - x_2)^2$

δ) $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$

ΠΡΟΣΟΧΗ :

Έστω η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, με $a \neq 0$ και η διακρινούσά της να είναι $\Delta > 0$.Αν x_1, x_2 οι ρίζες της τότε : $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ είναι το **άθροισμα** των ριζών της και $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$ είναι το **γινόμενο**.

ΠΡΟΣΟΧΗ :

Μπορούμε να μετασχηματίσουμε την :

$$ax^2 + bx + \gamma = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

σε ισοδύναμη με συντελεστές το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών της.

4. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 5x - 2 = 0$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ β) $x_1^2 + x_2^2$ γ) $x_1^3 + x_2^3$ δ) $\frac{x_1^2 + x_1 + x_2 + x_2^2}{(x_1 + 1)(x_2 + 2)}$

5. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $2x^2 + 3x + 1 = 0$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

α) $x_1 + x_2$ β) x_1x_2 γ) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ δ) $x_1 + \frac{1}{x_1} + x_2 + \frac{1}{x_2}$

6. Οι ρίζες της εξίσωσης $2x^2 + 3x - 4 = 0$ είναι οι x_1, x_2 . Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ β) $(x_1 + 1)(x_2 + 1)$ γ) $x_1x_2^2 + x_2x_1^2$

δ) $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$ ε) $x_1^3x_2 + x_2^3x_1$ στ) $\frac{1}{x_1x_2^2} + \frac{1}{x_2x_1^2}$

ζ) $(3x_1 - 2)(3x_2 - 2)$ η) $(x_1 - x_2)^2$ θ) $\frac{1}{x_1 + 3} + \frac{1}{x_2 + 3}$

7. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 1 = 0$ να υπολογίσετε τις τιμές των επόμενων παραστάσεων :

α) $(x_1 - x_2)^2$ β) $|x_1 - x_2|$ γ) $(1 - x_1)^5(1 - x_2)^5$

8. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$, να εκφραστούν με τη βοήθεια των συντελεστών a, b, γ τα αθροίσματα :

α) $x_1^2 + x_2^2$ β) $x_1^3 + x_2^3$ γ) $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$

9. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 2x + \lambda = 0$ να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει η σχέση :

$$\left(x_1 - \frac{2}{x_2}\right)\left(x_2 - \frac{2}{x_1}\right) = -8$$

10. Έστω οι εξισώσεις $ax^2 + bx + \gamma = 0$ (1), $a \neq 0$ και $x^2 - Sx + P = 0$, όπου S και P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1). Να αποδείξετε ότι $S^2 - 4P = \frac{\Delta}{a^2}$.

11. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $2x^2 - 4x + 1 = 0$, να βρείτε την εξίσωση που έχει ρίζες :

α) $x_1 - 2, x_2 - 2$ β) $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_1}$ γ) x_1^2, x_2^2 δ) x_1^3, x_2^3

12. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$, να υπολογίσετε την εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ως ρίζες τα παρακάτω ζεύγη αριθμών :

α) $-x_1, -x_2$ β) $\frac{\lambda}{x_1}, \frac{\lambda}{x_2}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) γ) $1 + x_1, 1 + x_2$

13. Η εξίσωση $x^2 - px + q = 0$, $q \neq 0$, έχει $\Delta > 0$ και ρίζες x_1, x_2 . Να βρείτε την εξίσωση με ρίζες τα ζεύγη :

α) $x_1 - x_2, x_2 - x_1$ β) $-\frac{1}{x_2}, -\frac{1}{x_1}$

14. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - \lambda x - \lambda^2 = 0$, $\lambda \neq 0$, να σχηματίσετε την εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\rho_1 = \frac{x_1^2}{x_2}$ και $\rho_2 = \frac{x_2^2}{x_1}$.

15. Να προσδιορίσετε τον $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $3x^2 + (x + 1)\lambda - x\lambda^2 = 2(1 - 10x)$ να έχει δύο ρίζες αντίθετες.

16. Να προσδιορίσετε τον $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση :

$$3(\lambda - 2)x^2 - (14\lambda - 8)x + 3(\lambda^2 + 2\lambda - 8) = 0$$

να έχει δύο ρίζες αντίστροφες.

17. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda = 0$. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες οι ρίζες της είναι :

α) αντίθετες β) αντίστροφες.

18. Να υπολογίσετε τον $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $9x^2 - 18(\lambda - 1)x - 8\lambda + 24 = 0$, να έχει δύο ρίζες εκ των οποίων η μια να είναι διπλάσια της άλλης.

19. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + ax + \beta = 0$. Για ποιές τιμές των α, β οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι α, β .

20. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \forall \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $x^2 + 2x + 1 - 3\lambda = 0$ να έχει ρίζες :

- α) ετερόσημες β) αρνητικές.

21. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η εξίσωση $x^2 - (2\lambda + 1)x + \lambda^2 - 2 = 0$, να έχει ρίζες θετικές.

22. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (2\lambda + 1)x + 2\lambda = 0$, (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Δείξτε ότι η (1) έχει ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Χωρίς να λύσετε την (1), να διερευνήσετε για τις διάφορες τιμές του λ το πρόσημο των ριζών της.

23. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 3)x + 1 - 2\lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Δείξτε ότι έχει πάντα ρίζες πραγματικές.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, όταν οι ρίζες ικανοποιούν τις σχέσεις :

$$\frac{x_1}{2x_2} + \frac{x_2}{2x_1} + 3 = 0$$

γ) Δείξτε ότι η παράσταση $2(x_1 + x_2) - x_1x_2$ είναι ανεξάρτητη από το λ .

24. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης : $x(x - 2) = 3x - \lambda$, να δείξετε ότι η παράσταση

$$A = \left(x_1 - \frac{2}{x_2}\right)\left(x_2 - \frac{2}{x_1}\right), \text{ είναι ανεξάρτητη του } \lambda.$$

25. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + ax + \beta = 0$.

α) αν $\alpha^2 > 4\beta$, $\alpha < 0$ και $\beta > 0$, να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες θετικές και άνισες.

β) να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση $x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda - 1 = 0$, να έχει δύο ρίζες θετικές και άνισες.