



Κ Ε Φ Α Λ Λ Α Ι Ο 4ο - Φ Υ Λ Λ Ο Νο 3

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ
ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 2ου ΒΑΘΜΟΥΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις επόμενες ρητές εξισώσεις

α) $\frac{7}{x-2} + \frac{8}{x-5} = 3$

β) $x = \frac{1}{x}$

γ) $\frac{2x+1}{3-x} = \frac{4-x}{x+1}$

δ) $x-1 = \frac{8}{x+1}$

ε) $\frac{2}{x+3} - \frac{2}{3-x} = \frac{x^2-21}{x^2-9}$

ΠΡΟΣΟΧΗ :

Ρητές ονομάζονται οι εξισώσεις, όπου ο άγνωστος εμφανίζεται σε **παρονομαστή** κλάσματος. Ονομάζονται και **κλασματικές**.

Πρέπει οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του **μηδενός**.

Μετατρέπονται σε **δευτεροβάθμιες** με απαλοιφή των παρονομαστών αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών

2. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις :

α) $\frac{7}{2x-3} + \frac{5}{x-1} = 12$

β) $\frac{3x}{x-1} - \frac{2x}{x+2} = \frac{3x-6}{(x-1)(x+2)}$

γ) $\frac{x+1}{x-3} = \frac{2(x+1)}{x+3}$

δ) $\frac{3x^2}{x^2-1} = \frac{4}{x-1}$

ε) $\frac{5x}{x-7} - \frac{4(3x+1)}{x^2-49} = \frac{8-3x}{x+7}$

στ) $\frac{7}{x+1} + \frac{x+4}{2x-2} = \frac{3x^2-38}{x^2-1}$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x+3} = 0$

β) $\frac{6}{x+1} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{x}$

γ) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = 0$

δ) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2-2}{x^2+x}$

4. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

$$\alpha) \frac{2}{x^2 - 4} - \frac{1}{x^2 - 2x} + \frac{x - 4}{x^2 + 2x} = 0$$

$$\beta) \frac{1}{2x - 3} = \frac{5}{x} + \frac{3}{2x^2 - 3x}$$

$$\gamma) \frac{2}{x} + \frac{2x - 3}{x - 2} + \frac{2 - x^2}{x^2 - 2x} = 0$$

$$\delta) \frac{x}{x - \alpha} + \frac{2\alpha}{x + \alpha} = \frac{8\alpha^2}{x^2 - \alpha^2}$$

$$\epsilon) x - \alpha = \frac{1}{x} - \frac{1}{\alpha}$$

$$\sigma\tau) \frac{1}{\alpha + \beta + x} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{x}$$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 12) = 0$$

$$\beta) 2(x^2 - 5x + 6)(x^2 - x - 2) = 0$$

$$\gamma) x^3 - 3x^2 - 4x = 0$$

$$\delta) 3x^3 - 9x^2 + 6x = 0$$

$$\epsilon) (x^2 - 1)(x^2 + 3)(x^2 + 4x) = 0$$

$$\sigma\tau) (3x - 1)(x^2 + 2x + 7) = 0$$

6. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

$$\alpha) x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

$$\beta) x^4 - 6x^2 + 8 = 0$$

$$\gamma) 4x^4 - 8x^2 + 3 = 0$$

$$\delta) 4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$$

$$\epsilon) 4x^4 - 7x^2 - 2 = 0$$

$$\sigma\tau) x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$\zeta) x^4 + 7x^2 + 10 = 0$$

$$\eta) x^4 - x^2 - 6 = 0$$

$$\theta) x^4 - 6x^2 + 9 = 0$$

$$\iota) x^4 + 9x^2 + 18 = 0$$

$$\iota\alpha) \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^2 - 4} = 2$$

$$\iota\beta) \frac{2x^2}{x^2 - 4} - \frac{1}{x^2 - 1} = 1$$

ΠΡΟΣΟΧΗ :

Η εξίσωση της μορφής $ax^4 + bx^2 + \gamma = 0$, με $a \neq 0$, ονομάζεται **διτετράγωνη**.

Μπορούμε να την λύσουμε θέτοντας :

$$x^2 = y, \text{ οπότε } x^4 = y^2, \quad y \geq 0,$$

και έτσι έχουμε να λύσουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση $ay^2 + by + \gamma = 0$.

Δεχόμαστε μόνο τις μη αρνητικές λύσεις για το y και κατόπιν επιστρέφουμε στην αντικατάσταση $x^2 = y$, για να υπολογίσουμε το x .

7. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

$$\alpha) \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{19x}{12}$$

$$\beta) \frac{x^2 - 16}{9} = \left(\frac{5}{x}\right)^2$$

$$\gamma) \left(\frac{3x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{3x}{x+1}\right)^2 = 10$$

8. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

$$\alpha) x^2 - 7|x| + 10 = 0$$

$$\beta) (x - 1)^2 - 7|x - 1| + 12 = 0$$

$$\gamma) x^2 - 2|x| - 3 = 0$$

$$\delta) (x - 3)^2 - 5|x - 3| + 6 = 0$$

9. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις :

$$\alpha) \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 5\frac{|x-1|}{2} - 6 = 0$$

$$\beta) \left(\frac{x+2}{x-4}\right)^2 + 2\left|\frac{x+2}{x-4}\right| - 12 = 0$$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) x^2 - 3|x-2| + 1 = 0$$

$$\beta) x^2 = |3x-4|$$

$$\gamma) x^2 - |x+1| - 5 = 0$$

$$\delta) x^2 = \left|\frac{9x-5}{2}\right|$$

$$\epsilon) |x^2 + 3x - 2| = 2$$

$$\sigma\tau) |x^2 - 5x + 6| + |x - 2| = 0$$

11. Να λύσετε τις ακόλουθες εξισώσεις :

$$\alpha) (4x-1)^2 + 3(4x-1) - 4 = 0$$

$$\beta) 2(x^2-4)^2 - 5(x^2-4) + 3 = 0$$

$$\gamma) (x^2-3x)^2 - 38(x^2-3x) + 280 = 0$$

$$\delta) (x^2+x-1)^2 - 6(x^2+x-1) - 7 = 0$$

$$\epsilon) \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{2}{x}\right) - 12 = 0$$

$$\sigma\tau) \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$$

$$\zeta) \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 36$$

$$\eta) \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0$$

$$\theta) \left(\frac{x^2-6}{x}\right)^2 - 6\left(\frac{x^2-6}{x}\right) + 5 = 0$$

$$\iota) 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 11\left(x + \frac{1}{x}\right) + 19 = 0$$

12. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) x^6 - 28x^3 + 27 = 0$$

$$\beta) x^6 + 21x^3 - 108 = 0$$

**ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ
ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 2ου ΒΑΘΜΟΥ**

13. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} 2x+3y=7 \\ xy=2 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} xy=-1 \\ 10x+3y=13 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} y=-x^2 \\ y-5x+6=0 \end{cases}$$

14. Να λύσετε τα παρακάτω μη γραμμικά συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ y - x = 1 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ xy = 1 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} x^2 + y^2 = 6 \\ y - x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\epsilon) \begin{cases} x^2 - y = 1 \\ x - y = -5 \end{cases}$$

$$\sigma\tau) \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

15. Να λύσετε τα επόμενα συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 91 \\ x + y = 11 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 31 \\ 2xy = 12 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 0 \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \end{cases}$$

16. Να λύσετε τα συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} x = \frac{y-1}{2} \\ y = x^2 - 2x + 4 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} \frac{3}{x+5} + \frac{5}{y-3} = 2 \\ \frac{1}{x-1} = \frac{1}{5-y} \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy + x + y = 5 \end{cases}$$

17. Να λύσετε τα συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} xy - x - y = 29 \\ x^2 + y^2 - (x+y) = 72 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ x^2 - y^2 + x - y = 4 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} x^2 - 3y^2 + x - 2y = 1 \\ 2x^2 + 3y^2 + x + 2y = 0 \end{cases}$$

18. Να λύσετε τα συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} (x+y)^2 - 12(x+y) + 35 = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 75 \\ x^2 - xy + y^2 = 25 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 = 0 \\ 2x^2 + xy + y^2 = 0 \end{cases}$$

19. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, να προσδιορισθεί το πλήθος των λύσεων του συστήματος :

$$\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = \mu x - 2 \end{cases}$$

20. Να προσδιορισθεί για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ο αριθμός των λύσεων του συστήματος :

$$\begin{cases} \frac{y}{2} = x^2 \\ x - y = \lambda \end{cases}$$

21. Δίνεται η ευθεία $y = \lambda x - 2$ και η παραβολή $y = 2x^2$. Να προσδιορίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία να έχει με την παραβολή :

α) ένα κοινό σημείο β) δύο κοινά σημεία γ) κανένα κοινό σημείο.

22. Να υπολογισθούν οι κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου του οποίου ο λόγος των κάθετων πλευρών του είναι $\frac{4}{5}$ και η υποτεινούσά του 41 cm.

23. Το εμβαδό ενός ορθογωνίου παρ/μου είναι 360 m^2 . Αν αυξηθεί η μια διάστασή του κατά 10 m και ελαττωθεί η άλλη κατά 6 m το εμβαδό του δεν μεταβάλλεται. Να βρεθούν οι διαστάσεις του.